การสร้างเสริมความเข้าใจเชิงมโนทัศน์เกี่ยวกับวิถีความเค้น ด้วยดิจิตัลโฟโตอิลาสติกซิตี

Enhancement of conceptual understanding about stress trajectories by means of digital photoelasticity

ณัฐวัฒน์ พลอยทับทิม [1] พิเชษฐ์ พินิจ[2]

[2]pichet.pin@kmutt.ac.th

[1]นักศึกษาระดับปริญญาตรี ภาควิชาครุศาสตร์เครื่องกล คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมและเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

[2]อาจารย์ภาควิชาครุศาสตร์เครื่องกล คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมและเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

บทคัดย่อ : บทความนี้นำเสนอแผนภาพของวิถีความเค้นของ σ_1 และ σ_2 ซึ่งแผนภาพนี้จะใช้อธิบายลักษณะการไหลของความเค้นจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง แผนภาพวิถีความเค้นที่ได้จะขึ้นอยู่กับแผนภาพไอโซคลินิกในย่านจริง (-90° ถึง 90°) ซึ่งได้จากกระบวนการคืนรูป ผลลัพธ์ที่ได้จากการวาดแนวเส้นสัมผัส แสดงให้เห็นว่า วิถีความเค้นที่ได้จะมีความสัมพันธ์โดยตรงกับตำแหน่งและทิศทางของแรงที่กระทำ

คำสำคัญ: การจำลอง, แผนภาพวิถีความเค้น, โฟโตอิลาสติกซิตี

ABSTRACT: This paper presents a way to express the stress trajectories of σ_1 and σ_2. The stress trajectories are used to describe the flow of stress from one point to other points. The use of the isoclinic phase map in the range of -90° to 90° obtained using the phase unwrapping method is necessary. The results obtained show that the map of stress trajectories has a strong relation with the position and the direction of the applied loads

KEYWORDS: Simulation, Stress trajectories, Photoelasticity

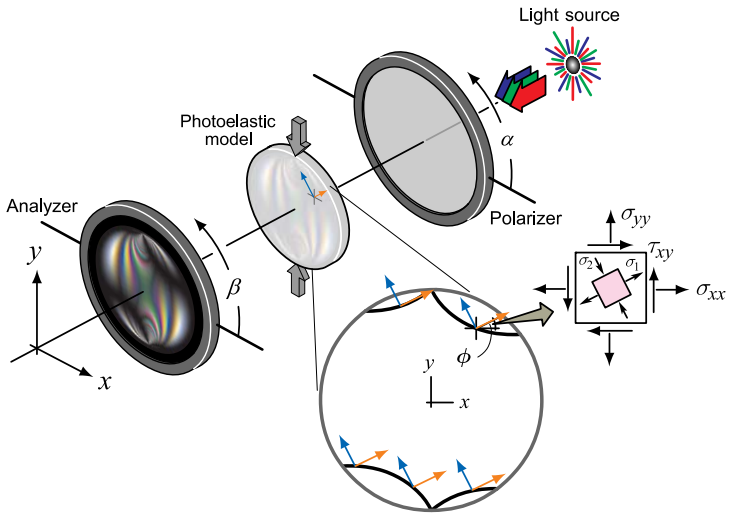
1. บทนำ

วิธีดิจิทัลโฟโตอิลาสติกซิตี (Digital photoelasticity) เป็นสาขาใหม่อันหนึ่งในวิธีวิเคราะห์ความเค้นซึ่งเกิดจากรวมโฟโตอิลาสติกซิตีแผนเดิมเข้ากับอุปกรณ์ทางด้านการบันทึกข้อมูลที่เป็นแบบดิจิทัลรวมทั้งการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณ หลักการของดิจิทัลโฟโตอิลาสติกซิตีนี้ตั้งอยู่บนพื้นฐานความจริงที่ว่าพลาสติกโปร่งใสบางจำพวกจะแสดงปรากฏการณ์หักเหซ้อน (Birefringence) เมื่ออยู่ภายใต้การกระทำของภาระภายนอก ปรากฏการณ์หักเหซ้อนนี้จะสามารถมองเห็นได้ภายใต้สนามแสงโพลาไรซ์ โดยที่ในเบื้องต้นตัวแบบที่อยู่ภายใต้ภาระภายนอกถูกติดตั้งในตำแหน่งที่เหมาะสมในอุปกรณ์ที่เรียกว่าโพลาริสโคป (รูปที่ 1) แสงที่เคลื่อนที่ผ่านตัวแบบและแผ่นอนาไลซ์ ซึ่งจะมองเห็นเป็นรูปริ้วต่างๆ ตามขนาดและทิศทางของความเค้นที่เกิดขึ้นภายในตัวแบบอันเนื่องมาจากภาระภายนอกนั้น โดยที่ริ้วดังกล่าวสามารถแบ่งออกได้ 2 ชนิด [1]

1.1 ริ้วไอโซคลินิก

ในตำแหน่งที่ทิศทางความเค้นหลักซ้อนทับกับระนาบของแสงโพลาไรซ์ (แกนแสงของแผ่นโพลาไรซ์) แสงจะเคลื่อนที่ผ่านตลอดไปยังแผ่นอนาไลซ์โดยไม่มีการเปลี่ยนแปลงมุมของแสง ดังนั้นหากแกนแสงของแผ่นอนาไลซ์ตั้งฉากกับแกนแสงของแผ่นโพลาไรซ์แล้ว แสงก็ไม่สามารถผ่านไปได้จึงทำให้มองเห็นเป็นแถบสีดำ การจัดโพลาริสโคปในลักษณะนี้ถูกเรียกว่า การจัดแบบฉากหลังมืด ในทางตรงกันข้าม หากกำหนดให้แกนแสงของแผ่นอนาไลซ์และแผ่นโพลาไรซ์ขนานกันแล้วก็จะมองเห็นเป็นแถบสีขาว ซึ่งการจัดโพลาริสโคปในลักษณะนี้ถูกเรียกว่า การจัดแบบฉากหลังสว่าง

เนื่องจากแถบไอโซคลินิกนี้จะเกิดขึ้นตามตำแหน่งของแกนแสงดังที่กล่าวข้างต้น หากแผ่นอนาไลซ์และ/หรือแผ่นโพลาไรซ์หมุนไปก็จะทำให้ตำแหน่งของแถบไอโซคลินิกเปลี่ยนไปด้วยเช่นกัน ดังนั้น หากมีการบันทึกตำแหน่งของแถบไอโซคลินิกเป็นช่วงๆ ที่เหมาะสมแล้ว ก็จะทำให้ได้แผนภาพไอโซคลินิกตลอดทั่วทั้งตัวแบบ



รูปที่ 1 โพลาริสโคปแบบแสงโพลาไรซ์ระนาบประกอบไปด้วยแผ่นโพลาไรซ์ ตัวแบบแผ่นวงกลมรับแรงกดในแนวดิ่งตามแนวเส้นผ่านศูนย์กลาง และ แผ่นอนาไลซ์

1.2 ริ้วไอโซโครมาติก

ที่ความเค้นขนาดหนึ่งที่กระทำต่อตัวแบบ จะทำให้เกิดแถบสีสลับกับแถบสีดำ โดยที่แถบสีนี้จะขึ้นอยู่กับสีของแหล่งกำเนิดแสง เช่นหากเป็นแสงเอกรงค์สีเขียวแล้วริ้วไอโซโครมาติกก็จะเป็นสีเขียวสลับดำ แต่หากแหล่งกำเนิดแสงเป็นแสงสีขาวแล้ว ริ้วไอโซโครมาติกก็จะเป็นสีรุ้งสลับดำ แถบสีหรือสีรุ้งที่เหมือนกันจะแสดงถึงความเท่ากันของ $(\sigma_1 - \sigma_2)$ ในขณะที่แถบสีดำจะแสดงถึงจำนวนรอบที่ตัวแปรไอโซโครมาติกเปลี่ยนแปลงครบรอบ กล่าวคือทุกๆ 2π ดังนั้น หากจำนวนของแถบสีดำมีมากในบริเวณหนึ่ง ก็แสดงว่าบริเวณนั้นมีค่าความเค้นสูง ด้วยเหตุนี้หากต้องการเพียงข้อมูลในเบื้องต้นโดยมิต้องทำการคำนวณใดๆ ทั้งสิ้นริ้วไอโซโครมาติกก็จะให้รายละเอียดได้ทันทีถึงตำแหน่งที่อาจจะเกิดความเสียหายอันเนื่องมาจากค่าความเค้นที่สูง ซึ่งลักษณะเช่นนี้เป็นจุดเด่นของโฟโตอิลาสติกซิตี

1.3 จุดที่มีความไม่ต่อเนื่องในริ้วไอโซคลินิก [2]

เนื่องจากริ้วไอโซคลินิกแสดงถึงทิศทางความเค้นหลัก ซึ่งในทางทฤษฎีนั้นสามารถกำหนดหาได้โดยสมการ

$$\tan 2\phi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \tag{1}$$

โดยที่ σ_{xx} σ_{yy} และ τ_{xy} คือองค์ประกอบความเค้นในระบบพิกัดฉาก

มีบางบริเวณที่ทิศทางของความเค้นมีค่าเท่าๆ กันในทุกๆ ทิศทาง เงื่อนไขนี้จะเกิดขึ้นได้ใน 2 กรณีคือ

- $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma \neq 0$ $(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma \neq 0)$ โดยที่บริเวณใดๆ ก็ตามที่องค์ประกอบความเค้นเป็นไปตามเงื่อนไขดังกล่าวแล้วบริเวณหรือจุดนั้นจะถูกเรียกว่า จุดไอโซโทรปิก (Isotropic point) และ
- $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma = 0$ $(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = 0)$ โดยที่บริเวณใดๆ ก็ตามที่องค์ประกอบความเค้นเป็นไปตามเงื่อนไขดังกล่าวแล้วบริเวณหรือจุดนั้นจะถูกเรียกว่า จุดเอกพจน์ (Singular point)

จุดไอโซโทรปิกจะเป็นจุดที่เกิดขึ้นหรืออยู่ในพื้นที่ของตัวแบบเท่านั้นในขณะที่จุดเอกพจน์จะเกิดขึ้นหรืออยู่ที่ขอบของตัวแบบ ที่เป็นเช่นนี้ก็เนื่องมาจากว่าค่าความเค้นหลักที่ตั้งฉากกับขอบของตัวแบบนั้นมีค่าเท่ากับศูนย์ (0)

1.4 วิถีความเค้น

วิถีความเค้นคือแนวเส้นที่สัมผัสกับทิศทางของความเค้นที่จุดหนึ่งๆ ซึ่งหากเชื่อมโยงแนวเส้นเหล่านี้เข้าด้วยกันแล้วก็จะเกิดเป็นโครงตาข่ายตัดกันเป็นมุมฉากโดยที่กลุ่มของเส้นชุดหนึ่งจะแสดงวิถีความเค้น σ_1 ในขณะที่อีกชุดหนึ่งจะแสดงวิถีความเค้น σ_2

สมการซึ่งแสดงวิถีความเค้นสามารถกำหนดหาได้จากสมการ (1) ดังนี้ เนื่องจาก $\tan\phi$ แสดงถึงความลาดชันหรือลาดเอียง (Gradient) ของวิถีความเค้น ดังนั้น [3]

$$\tan\phi = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{2}$$

จากสมการ (1) สามารถเขียนได้ว่า

$$\tan 2\phi = \frac{2\tan\phi}{1-\tan^2\phi} = \frac{2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{1-\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}} \tag{3}$$

และหลังจากจัดรูปสมการใหม่ก็จะได้ดังนี้

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\sigma_{yy}-\sigma_{xx}}{2\tau_{xy}}\right) \pm \sqrt{1+\left(\frac{\sigma_{yy}-\sigma_{xx}}{2\tau_{xy}}\right)^2} \tag{4}$$

จะเห็นได้ว่าสมการ (4) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์โดยที่เครื่องหมาย ± หน้าเครื่องหมายรากที่สองนั้นแสดงการตั้งฉากซึ่งกันและกันของวิถีความเค้นทั้งสอง การแก้สมการ (4) นั้นในทางปฏิบัติแล้วไม่สามารถกระทำได้เนื่องจากว่า องค์ประกอบความเค้นทั้งสามต่างก็เป็นฟังก์ชั่นของพิกัด (x, y)

ตามคำนิยามของวิถีความเค้น จะเห็นได้ว่าหากทราบแผนภาพไอโซคลินิกในย่านจริงแล้ว (-90° ถึง 90°) ก็สามารถที่จะสร้างวิถีความเค้นได้ ผู้วิจัยได้นำเสนอวิธีการจำลองภาพสนามความเค้นของตัวแบบต่างๆ [4,5] เพื่อใช้ประโยชน์ทางด้านงานวิจัย หากจะนำมาประยุกต์ใช้ทางด้านการศึกษาที่เกี่ยวการเรียนการสอนในรายวิชาที่เกี่ยวข้องกับความเค้น เช่น กลศาสตร์ของแข็ง หรือ การออกแบบชิ้นส่วนเครื่องจักรกลก็จะทำให้เกิดประโยชน์มากยิ่งขึ้นโดยเฉพาะอย่างยิ่งหากผู้เรียนทราบถึงลักษณะของวิถีความเค้นแล้วก็จะช่วยในการกำหนดรูปทรงของชิ้นส่วนเครื่องกลให้เหมาะสมกับสภาพของภาระที่มากระทำซึ่งก็จะเป็นสร้างเสริมความเข้าใจให้แก่ผู้เรียนมากยิ่งขึ้น

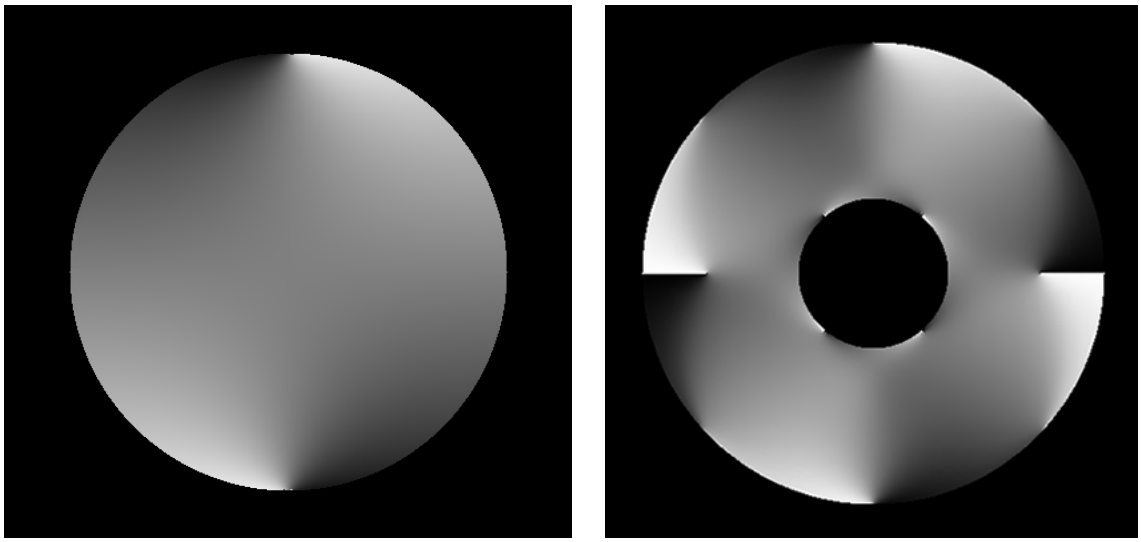
2. การกำหนดหาแผนภาพไอโซคลินิก

ในเบื้องต้นจะใช้ภาพจำลองของตัวแบบแผ่นวงกลมรับแรงเข้มกดตามแนวเส้นผ่านศูนย์กลางและแผ่นวงแหวนรับแรงเข้มกดตามแนวเส้นผ่านศูนย์กลางมากำหนดหาแผนภาพไอโซคลินิก ซึ่งวิธีการกำหนดหาแผนภาพไอโซคลินิกนี้จะใช้วิธีการที่ได้กล่าวไว้แล้วซึ่งสามารถดูรายละเอียดได้ในเอกสารอ้างอิงหมายเลข [2] โดยที่แผนภาพไอโซคลินิกที่จะใช้นั้นจะมีค่าอยู่ในช่วง -90° ถึง 90°

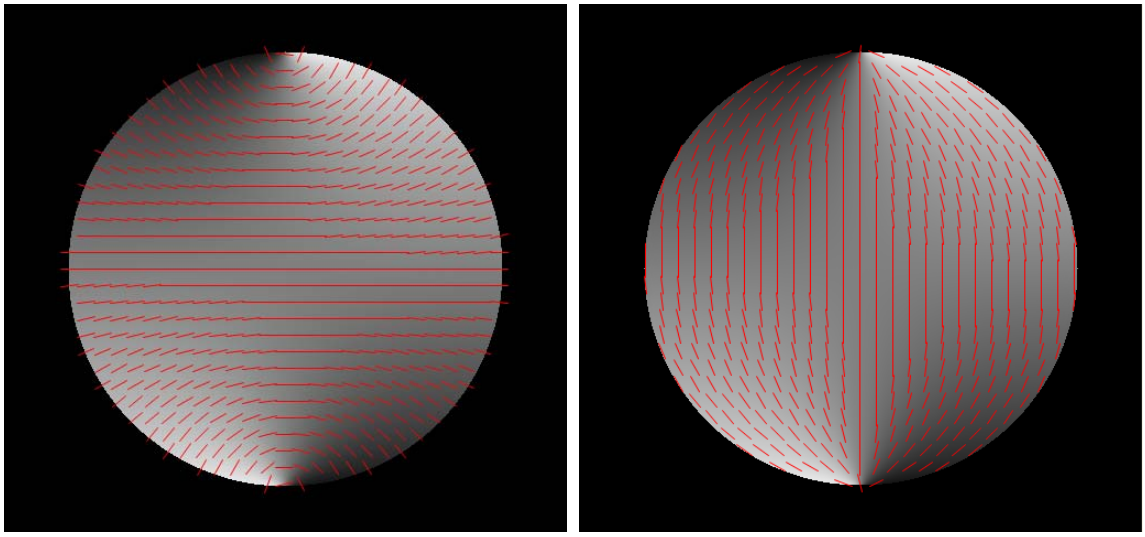
3. ผลลัพธ์และการอภิปรายผล

รูปที่ 2แสดงแผนภาพไอโซคลินิกของแผ่นวงกลมรับแรงเข้มกดตามแนวเส้นผ่านศูนย์กลางและแผ่นวงแหวนรับแรงเข้มกดตามแนวเส้นผ่านศูนย์กลาง รูปที่ 3 แสดงแนวเส้นสัมผัสทิศทางของ σ_1 และ σ_2 ของแผ่นวงกลม ส่วนรูปที่ 4 นั้นแสดงแนวเส้นสัมผัสทิศทางของ σ_1 และ σ_2 เช่นเดียวกับรูปที่ 3 แต่เป็นของแผ่นวงแหวน

พิจารณารูปที่ 3ก จะเห็นได้ว่าหากลากเส้นสีแดงเหล่านี้ต่อกันอย่างเหมาะสมแล้วก็จะได้แนวเส้นหนึ่งชุดโดยที่แนวเส้นบริเวณตรงกลางจะมีแนวโน้มเป็นเส้นตรงและเส้นเหล่านี้จะมีรัศมีความโค้งเพิ่มขึ้นเมื่อเข้าใกล้จุดที่มีแรงกระทำทั้งบนและล่าง การที่บริเวณตรงกลางของตัวแบบเส้นเป็นเส้นตรงแสดงให้เห็นว่าขนาดของความเค้นมีค่าน้อยกว่าเมื่อเทียบกับแนวเส้นอีกชุดหนึ่ง



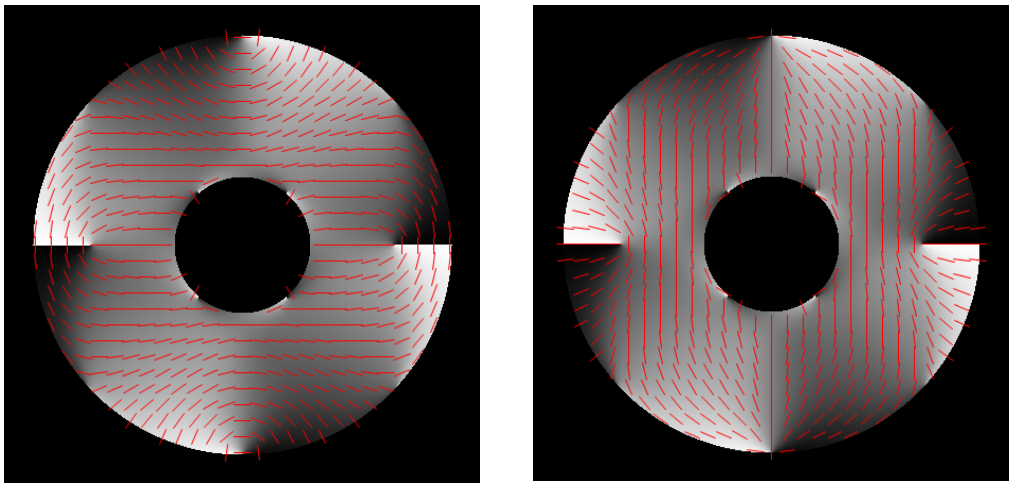
รูปที่ 2 แผนภาพไอโซคลินิกของ (ก) แผ่นวงกลมรับแรงเข้มกดตามแนวเส้นผ่านศูนย์กลาง และ (ข) แผ่นวงแหวนรับแรงเข้มกดตามแนวเส้นผ่านศูนย์กลาง สีขาวแสดงค่าไอโซคลินิกที่ 90° ส่วนสีดำแสดงค่าไอโซคลินิกที่ -90°



รูปที่ 3 แผนภาพไอโซคลินิกของพร้อมด้วยเส้นสีแดงที่แสดงเส้นสัมผัสกับทิศทางของความเค้นที่จุดหนึ่งของแผ่นวงกลมรับแรงเข้มกดตามแนวเส้นผ่านศูนย์กลาง (ก) เส้นสัมผัสของทิศทาง σ_1 และ (ข) เส้นสัมผัสของทิศทาง σ_2

รูปที่ 3ข แสดงให้เห็นแนวเส้นอีกชุดหนึ่งซึ่งมีแนวผ่านจุดที่แรงกระทำทั้งสอง บริเวณตรงกลางของตัวแบบแนวเส้นจะมีลักษณะเป็นเส้นตรง ซึ่งหมายความว่าในส่วนนี้จะภาระความเค้นมากที่สุดเมื่อเทียบกับแนวอื่นๆ เนื่องจากตัวแบบนี้รับแรงกดผ่านเส้นผ่านศูนย์กลางดังนั้น วิถีความเค้นในรูปที่ 3ข จึงเป็นวิถีความเค้นอัด ซึ่งก็เป็นไปตามเงื่อนไข $\sigma_1 \geq \sigma_2$

ส่วนในรูปที่ 4 ก็สามารถอธิบายได้ในลักษณะเดียวกันกับรูปที่ 3 อย่างไรก็ตามในแผนภาพไอโซคลินิกของวงแหวนนี้จะมีจุดไอโซโทรปิกและจุดเอกพจน์ ซึ่งในรูปที่ 4ข แนวเส้นจะมีลักษณะโค้งอ้อมล้อมรอบ



รูปที่ 4 แผนภาพไอโซคลินิกของพร้อมด้วยเส้นสีแดงที่แสดงเส้นสัมผัสกับทิศทางของความเค้นที่จุดหนึ่งของแผ่นวงแหวนรับแรงเข้มกดตามแนวเส้นผ่านศูนย์กลาง (ก) เส้นสัมผัสของทิศทาง σ_1 และ (ข) เส้นสัมผัสของทิศทาง σ_2

เส้นการกระโดดของเฟส หากพิจารณาบริเวณตรงกลางแล้วก็จะเห็นได้ว่า มีลักษณะที่คล้ายกับแนวเส้นในรูปที่ 3 ดังนั้นแนวเส้นในรูปที่ 4 ก็จะแสดงการไหลของความเค้นที่เป็นความเค้นอัด

4. สรุปผล

บทความนี้ได้นำเสนอการสร้างวิถีความเค้น โดยอาศัยวิธีการคืนรูปเฟส ผลที่ได้จากการปฏิบัติชี้ให้เห็นว่าสำหรับตัวแบบที่รับแรงกดนั้น วิถีความเค้น σ_2 จะรับภาระไว้เกือบทั้งหมด สำหรับการนำไปประยุกต์ใช้ในการเรียนการสอนผู้วิจัยจะนำไปใช้ในรายวิชาที่เกี่ยวกับการประลอง ซึ่งจะให้ผู้เรียนได้ลงมือปฏิบัติการวาดด้วยตนเอง ซึ่งผลลัพธ์จากการประเมินผลการเรียนจะได้รายงานในโอกาสถัดไป

เอกสารอ้างอิง

[1] Ramesh, K. 2000. Digital Photoelasticity: Advanced Technique and Applications. Springer, Berlin Germany.

[2] Pinit, P. and Umezaki, E., 2007. Digitally Whole-field Analysis of Isoclinic Parameter in Photoelasticity by Four-step Color Phase-shifting Technique. Optics and Laser in Engineering, Vol. 45, No. 7, pp. 795-807.

[3] Molleda, F., Mora, J., Molleda, F.J., Carrillo, E., and Mellor, B.G., 2005. Stress trajectories for mode I fracture. Materials Characterization, Vol. 54, pp. 9-12.

[4] พิเชษฐ์ พินิจ, ณัฐวัฒน์ พลอยทับทิม และ ศรัญยู มั่นพิศุทธิ์, การจำลองแบบริ้วสนามความเค้นเพื่อวิธีวิเคราะห์ความเค้นในช่วงยืดหยุ่นด้วยแสง, ในการสัมมนาวิชาการทางวิศวกรรมศาสตร์มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ครั้งที่ 6, หาดใหญ่, สงขลา, 8-9 พฤษภาคม 2551, บนซีดีรอม บทความเลขที่ PEC6OR110, หน้า 659-664

[5] ศรัณยู มั่นพิศุทธิ์ และ พิเชษฐ์ พินิจ, การตรวจสอบผลเฉลยจากทฤษฎีสภาพยืดหยุ่นของแผ่นวงแหวนรับแรงเข้มกดตรงกันข้ามตามแนวเส้นผ่านศูนย์กลางด้วยวิธีวิเคราะห์ความเค้นในช่วงยืดหยุ่นโดยแสงเชิงดิจิตอล, ในการประชุมทางวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 22, มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์, ศูนย์รังสิต, 15-17 ตุลาคม 2551