การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 23
4 – 7 พฤศจิกายน 2552 จังหวัดเชียงใหม่

การจำลองสนามความเค้นของคานสี่เหลี่ยมอย่างง่ายรับแรงกระจายเอกรูปและแผ่นเรียบบางมีรูกลมตรงกลางรับความเค้นเฉือนล้วนด้วยโฟโตอีลาสติกซิตีเชิงเลข

A Digital Simulation of Stress Field of a Simply Supported Rectangular Beam under a Uniformly Distributed Load and a Plate with a Circular Hole at its Center under a Uniformly Shearing Stress using Digital Photoelasticity

ศรัณยู มั่นพิศุทธิ์ และ พิเชษฐ์ พินิจ*

ภาควิชาครุศาสตร์เครื่องกล คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมและเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี
บางมด ทุ่งครุ กรุงเทพฯ 10140
*ผู้ติดต่อ: pichet.pin@kmutt.ac.th, โทรศัพท์ (662) 4708522, โทรสาร (662) 4708527

บทคัดย่อ

สนามความเค้นมีความสำคัญต่อการออกแบบชิ้นส่วนทางกล ลักษณะของสนามความเค้นเป็นตัวกำหนดรูปร่างของชิ้นส่วน เพื่อให้สามารถรับภาระภายนอกได้ตามความต้องการ สิ่งซึ่งแฝงอยู่ในสนามความเค้น เช่น บริเวณที่ความเค้นมีค่าสูงสุด บริเวณที่ความเค้นมีค่าเท่ากับศูนย์ ลักษณะการไหลของความเค้น สามารถมองเห็นได้โดยอาศัยวิธีการวิเคราะห์ความเค้นเชิงทดลอง ที่เรียกว่า โฟโตอีลาสติกซิตีเชิงเลข บทความนี้นำเสนอการจำลองสนามความเค้นของคานอย่างง่ายอยู่ภายใต้แรงกระจายแบบเอกรูป และแผ่นเรียบบางขนาดใหญ่ที่มีรูกลมตรงกลางอยู่ภายใต้ความเค้นเฉือนล้วน โดยอาศัยวิธีโฟโตอีลาสติกซิตีเชิงเลขร่วมกับผลเฉลยแม่นตรงจากทฤษฎีสภาพยืดหยุ่น การจำลองตั้งอยู่บนพื้นฐานการใช้สมการความเข้มแสงควบคุม ผลจากการจำลองซึ่งอาศัยหลักการเลื่อนเฟสทำให้ได้ริ้วโฟโตอีลาสติก และริ้วไอโซพาชิก ที่มีความถูกต้องอย่างสมเหตุผล

คำหลัก: โฟโตอิลาสติกซิตีเชิงเลข, ริ้วไอโซคลินิก, ริ้วไอโซโครมาติก, ริ้วไอโซพาชิก

Abstract

Stress field is of paramount importance in design of mechanical members. It defines a shape of members being designed to withstand external loads. What are in a stress field, such as areas of high stresses, areas of zero stresses, and flow of stresses, can be seen by digital photoelasticity. This paper presents a digital simulation of stress fields of a simply supported rectangular beam under a uniformly distributed load and a plate with a circular hole at its center under a uniformly shearing stress by means of digital photoelasticity coupled with the exact solutions given from the Theory of Elasticity. The simulation is based on a use of governing intensity equation. Results from a simulation using the phase shifting method provide photoelastic fringe and isopachic fringe with reasonable accuracy.

Keywords: Digital photoelasticity, Isoclinic fringe, Isochromatic fringe, Isopachic fringe

1. บทนำ

โฟโตอีลาสติกซิตีเชิงเลขเป็นวิธีการวิเคราะห์ความเค้นเชิงทดลอง (experimental stress analysis) ที่สามารถแสดงสนามความเค้นในแบบเชิงทัศน์ การวิเคราะห์ความเค้นด้วยวิธีนี้มีตัวแปรที่สำคัญอยู่สองตัวแปร ซึ่งจะใช้อธิบายลักษณะของสนามความเค้นดังกล่าว ตัวแปรเหล่านี้ คือ ตัวแปรไอโซคลินิก และตัวแปรไอโซโครมาติก ตัวแปรไอโซคลินิกจะสัมพันธ์กับทิศทางของความเค้น ขณะที่ตัวแปรไอโซโครมาติกจะแสดงค่าผลต่างของความเค้นหลัก $(\sigma_1 - \sigma_2)$ ซึ่งสัมพันธ์กับค่าความเค้นเฉือนสูงสุด $\tau_{\max}$ อีกทอดหนึ่ง

ในการศึกษาทางด้านโฟโตอีลาสติกซิตีเชิงเลขนั้นยังมีตัวแปรอีกหลายตัวแปรที่มีความสำคัญต่อการวิเคราะห์ความเค้น และหนึ่งในนั้นก็คือ ตัวแปรไอโซ-พาชิก (isopachic parameter) ตัวแปรนี้แสดงถึงค่าผลรวมของความเค้นหลัก $(\sigma_1 + \sigma_2)$ ซึ่งหากนำค่า $(\sigma_1 - \sigma_2)$ รวมกับ $(\sigma_1 + \sigma_2)$ ด้วยเงื่อนไขที่เหมาะสมก็จะได้ค่าความเค้นหลัก σ_1 และ σ_2 ที่แยกออกจากกัน ซึ่งสามารถนำไปใช้ออกแบบชิ้นส่วนทางกลในทฤษฎีความเสียหาย (failure theories) เช่น ทฤษฎีความเค้นเฉือนสูงสุด หรือ ทฤษฎีพลังงานแปรรูป เป็นต้น

นักวิจัยหลาย ๆ ท่าน ได้ทำการศึกษาปัญหาเกี่ยวกับตัวแปรต่าง ๆ ข้างต้นเพื่อนำไปประยุกต์ใช้ในทางปฏิบัติ วิธีการต่าง ๆ ที่ถูกนำเสนอขึ้นมานั้นจะมีระดับความถูกต้องเชิงตัวเลขที่ขึ้นอยู่กับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสมการความเข้มแสงควบคุมที่เกี่ยวเนื่องกับชนิดหรือประเภทของโพลาริสโคป ที่ใช้ในการศึกษา

มีหลายปัจจัยที่มีอิทธิพลต่อประสิทธิภาพของวิธีการที่กล่าวถึงข้างต้น กล่าวคือ

- ความสามารถในการแก้ปัญหาหลาย ๆ รูปแบบ
- ความถูกต้องของผลลัพธ์
- ความรวดเร็วในการคำนวณ

จากการพิจารณาของผู้วิจัยเอง เห็นว่า ปัจจัยแรกเป็นเรื่องที่มีความท้ายทายมากที่สุด ทั้งนี้เพราะว่า หากมีวิธีการแก้ปัญหาหนึ่ง ๆ ที่สามารถใช้ได้กับหลาย ๆ สถานการณ์ก็จะเป็นประโยชน์อย่างมาก

วิธีการหนึ่ง ๆ ที่ถูกสร้างขึ้นจะต้องได้รับการทดสอบกับหลาย ๆ ปัญหาที่ทำไว้เป็นมาตรฐาน เพื่อที่ผู้สร้างจะได้เห็นพฤติกรรมการแก้ปัญหาของวิธีการนั้นได้อย่างชัดเจนเมื่อค่าตัวแปรเปลี่ยนไป ในการศึกษาทางด้านโฟโตอีลาสติกซิตีเชิงเลขนั้น การทดสอบวิธีการดังกล่าวกับภาพริ้วความเค้นจึงเป็นสิ่งที่ไม่สามารถหลีกเลี่ยงได้

เพื่อตอบสนองความจำเป็นดังกล่าว ผู้วิจัยเองได้จำลองภาพริ้วสนามความเค้นของปัญหาหลาย ๆ แบบ [1, 2] (รูปที่ 1) และในครั้งนี้ ผู้วิจัยจะนำเสนอการจำลองริ้วสนามความเค้นของคานสี่เหลี่ยมอย่างง่ายรับแรงกระจายเอกรูป และแผ่นเรียบบางมีรูกลมตรงกลางรับความเค้นเฉือนล้วน ซึ่งจะเป็นการเพิ่มจำนวนริ้วสนามความเค้นมาตรฐานอันเป็นประโยชน์ต่อการทดสอบวิธีการแก้ปัญหาทั้งที่ได้มีการนำเสนอไปแล้วและที่กำลังจะนำเสนอ เพื่อเป็นการพัฒนาขีดความสามารถของวิธีการข้างต้นต่อไปในอนาคต

2. ตัวแปรทางโฟโตอีลาสติกซิตี

ในการศึกษาทางด้านโฟโตอีลาสติกซิตี มีตัวแปรที่สำคัญสองตัวแปร คือ ตัวแปรไอโซคลินิก ϕ และ ตัวแปรไอโซโครมาติก N_{c} โดยที่ตัวแปรไอโซคลินิกจะมีความสัมพันธ์กับทิศทางของความเค้นหลัก ขณะที่ตัวแปรไอโซโครมาติกจะแสดงถึงขนาดของผลต่างของความเค้นหลัก อย่างไรก็ตามยังมีตัวแปรอีกหนึ่งตัวที่มีความสำคัญต่อการแยกความเค้น กล่าวคือ ตัวแปรไอ-โซพาชิก N_{p} หัวข้อนี้จะกล่าวเกี่ยวกับตัวแปรเหล่านี้

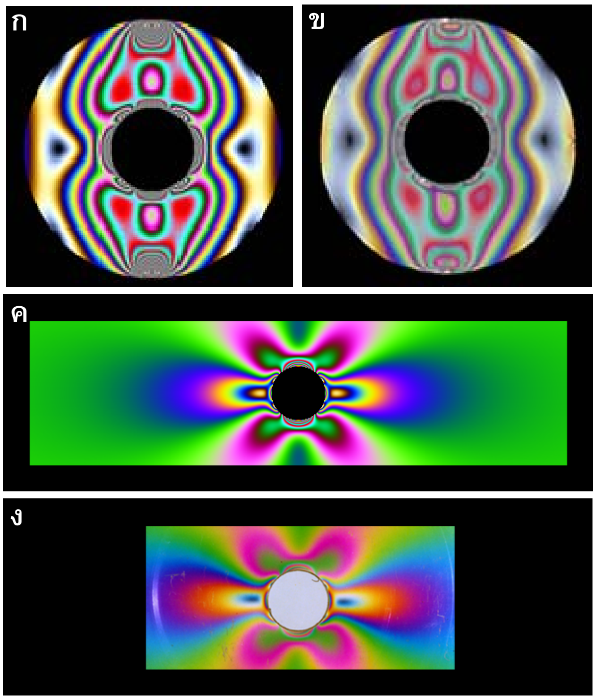
2.1 ตัวแปรไอโซคลินิก

เป็นที่ทราบกันดีว่า ทิศทางของความเค้นหลักสามารถคำนวณหาได้ โดยอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบความเค้น ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังนี้ [3]

$$\tan 2\phi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \tag{1}$$

สำหรับระบบพิกัดคาร์ทีเซียนและ

$$\tan 2(\phi - \theta) = \frac{2\tau_{r\theta}}{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}} \tag{2}$$



รูปที่ 1 ภาพสี (RGB) 24 บิต ริ้วไอโซโครมาติก โดยที่ (ก) และ (ข) เป็นภาพของแผ่นวงแหวนรับแรงเข้มกดตรงกันข้ามในแนวเส้นผ่านศูนย์กลางที่ได้จากการจำลอง และการทดลอง ตามลำดับ [1] ส่วน (ค) และ (ง) เป็นภาพแผ่นเรียบบางขนาดใหญ่ที่มีรูกลมตรงกลางรับความเค้นดึงล้วนที่ได้จากการจำลอง และการทดลอง ตามลำดับ [2]

สำหรับระบบพิกัดเชิงขั้ว โดยที่ θ คือ มุมระหว่างระบบพิกัดทั้งสอง

พิจารณาสมการ (1) หรือ (2) พบว่า ตัวแปรไอโซ-คลินิกจะมีค่าอยู่ในย่าน 0° ถึง $+90^\circ$ หรือ ย่าน -45° ถึง $+45^\circ$ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับการแสดงผลลัพธ์ แต่ค่ามอ-ดูโล (modulo) ของย่านทั้งสองจะมีค่าเท่ากัน คือ $+90^\circ$ ปัญหานี้เป็นปัญหาที่มีสำคัญในการวิเคราะห์หาค่า ϕ ทั้งนี้เนื่องจากว่า ในทางปฏิบัตินั้น ϕ จะมีค่าอยู่ในย่าน -90° ถึง $+90^\circ$

ปัญหานี้ทำให้ผู้วิเคราะห์ไม่สามารถแยกได้ว่าทิศทางค่าใดจะสอดคล้องกับ σ_1 หรือ σ_2 ซึ่งในทางทฤษฎีเราสามารถแก้ปัญหาที่ว่านี้โดยอาศัยวงกลมโมร์หรือวิธีเวกเตอร์เจาะจง [4] อย่างไรก็ตาม การแก้ปัญหาด้วยวิธีดังกล่าวเป็นกระบวนการที่ยุ่งยากซับซ้อนมาก หากจะวิเคราะห์ทั่วทั้งสนามความเค้น ด้วยเหตุนี้การวิเคราะห์ตัวแปรไอโซคลินิกเชิงสนามจึงเป็นเรื่องที่มีความจำเป็นอย่างยิ่ง

2.2 ตัวแปรไอโซโครมาติก

ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรไอโซโครติกหรืออันดับริ้วไอโซโครติก N_c กับ $(\sigma_1 - \sigma_2)$ สามารถเขียนเป็นสมการ โดยอาศัยกฎแห่งแสงและความเค้น (stress-optic law) ได้ดังนี้ [1]

$$N_\mathrm{c} = \frac{t}{f_\sigma}(\sigma_1 - \sigma_2) \tag{3}$$

โดยที่ f_σ คือ ค่าสัมประสิทธิ์สัมพัทธ์ทางแสงและความเค้น และ t คือ ความหนาของตัวแบบ

สมการ (3) สามารถเขียนได้ใหม่ในพจน์ขององค์ประกอบความเค้นระนาบ [3] กล่าวคือ

$$N_\mathrm{c} = \frac{t}{f_\sigma}\left\{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2\right\}^{1/2} \tag{4}$$

สำหรับระบบพิกัดคาร์ทีเซียน และ

$$N_\mathrm{c} = \frac{t}{f_\sigma}\left\{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 4\tau_{r\theta}^2\right\}^{1/2} \tag{5}$$

สำหรับระบบพิกัดเชิงขั้ว

พิจารณาสมการ (4) และ (5) จะพบว่า N_c จะมีค่าเท่ากันและไม่ขึ้นอยู่กับมุมระหว่างระบบพิกัดทั้งสอง ซึ่งต่างจากตัวแปรไอโซคลินิก (เปรียบเทียบกับสมการ (1) และ (2))

2.3 ตัวแปรไอโซพาชิก

ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรไอโซพาชิกหรืออันดับริ้วไอโซพาชิก N_p กับ $(\sigma_1 + \sigma_2)$ สามารถเขียนเป็นสมการ ได้ดังนี้ [5]

$$N_\mathrm{p} = \frac{t}{f_\sigma}(\sigma_1 + \sigma_2) \tag{6}$$

สมการ (6) สามารถเขียนได้ใหม่ในพจน์ขององค์ประกอบความเค้นระนาบ กล่าวคือ

$$N_\mathrm{p} = \frac{t}{f_\sigma}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \tag{7}$$

สำหรับระบบพิกัดคาร์ทีเซียน และ

$$N_{\mathrm{p}} = \frac{t}{f_\sigma}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \tag{8}$$

สำหรับระบบพิกัดเชิงขั้ว

สมการ (6), (7) และ (8) ได้แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างอันดับริ้วไอโซพาชิกและตัวคงที่ค่าแรกของความเค้น (first invariant of stress) สำหรับปัญหาความเค้นระนาบ นอกจากนี้พึงสังเกตว่าค่า $(\sigma_1 + \sigma_2)$ สามารถนำไปใช้ในการแยกค่าความเค้นหลักได้โดยนำไปรวมกับค่า $(\sigma_1 - \sigma_2)$ สำหรับการแยกความเค้นหลักโดยการใช้ค่า $(\sigma_1 + \sigma_2)$ เพียงอย่างเดียว สามารถกระทำได้โดยใช้วิธีการผลต่างสืบเนื่อง (finite difference method) ในการแก้สมการลาปลาซ $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_1 + \sigma_2) = 0$ อย่างไรก็ตาม จะไม่ขอกล่าวรายละเอียด เนื่องจากอยู่นอกเหนือวัตถุประสงค์ของบทความฉบับนี้

3. องค์ประกอบความเค้นระนาบ

บทความนี้พิจารณาปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นตรงสองปัญหา คือ คานสี่เหลี่ยมอย่างง่ายรับแรงกระจายแบบเอกรูป และแผ่นเรียบบางมีรูกลมตรงกลางรับความเค้นเฉือนล้วน โดยที่ผลเฉลยแม่นตรงเหล่านี้ได้จากทฤษฎีสภาพยืดหยุ่น (Theory of Elasticity)

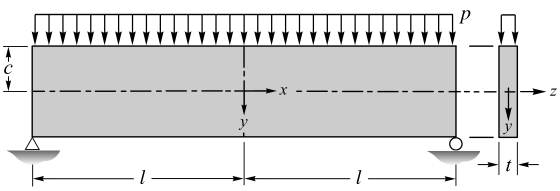
3.1 คานสี่เหลี่ยมอย่างง่ายรับแรงกระจายเอกรูป

สมการองค์ประกอบความเค้นในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนของคานสี่เหลี่ยมอย่างง่ายรับแรงกระจายเอกรูป (รูปที่ 2ก) สามารถเขียนได้ดังนี้ [6]

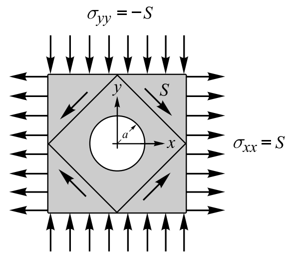
$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{3p}{4c}\left(\frac{l^2}{c^2} - \frac{2}{5}\right)y + \frac{3p}{4c^3}\left(x^2 y - \frac{2}{3}y^3\right) \\
\sigma_{yy} &= \frac{3p}{4c}y - \frac{p}{2} - \frac{p}{4c^3} \\
\tau_{xy} &= \frac{3p}{4c}\left(\frac{y^2}{c^2} - 1\right)x
\end{aligned} \tag{9}$$

โดยที่ p คือ ความดันที่กระทำต่อพื้นที่ผิวคานด้านบน, l คือ ระยะครึ่งหนึ่งของความยาวคาน และ c คือ ระยะความสูงครึ่งหนึ่งของคาน

ก



ข



รูปที่ 2 ลักษณะทางเรขาคณิตและการกระทำของภาระภายนอกต่อ (ก) คานสี่เหลี่ยมอย่างง่ายรับแรงกระจายเอกรูป และ (ข) แผ่นเรียบบางมีรูกลมตรงกลางรับความเค้นเฉือนล้วน

3.2 แผ่นเรียบบางมีรูกลมตรงกลางรับความเค้นเฉือนล้วน

สมการองค์ประกอบความเค้นในระบบพิกัดเชิงขั้วของแผ่นเรียบบางมีรูกลมตรงกลางรับความเค้นเฉือนล้วน (รูปที่ 2ข) สามารถเขียนได้ดังนี้ [6]

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= S\left[1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\right]\cos 2\theta \\
\sigma_{\theta\theta} &= -S\left[1 + \frac{3a^4}{r^4}\right]\cos 2\theta \\
\tau_{r\theta} &= -S\left[1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\right]\sin 2\theta
\end{aligned} \tag{10}$$

โดยที่ S คือ ค่าความเค้นเฉือนที่กระทำต่อแผ่นเรียบบาง, a คือ รัศมีของรูกลมตรงกลาง และ r คือ รัศมี ณ ตำแหน่งที่พิจารณาใด ๆ ภายในแผ่นเรียบบาง

4. การจำลอง

ในส่วนของการจำลองนี้จะใช้วิธีการเดียวกันกับที่คณะผู้วิจัยได้นำเสนอไว้แล้ว [1, 2] อย่างไรก็ตามจะขอกล่าวขั้นตอนการจำลองโดยย่อ ดังนี้

1. คำนวณหาค่าองค์ประกอบความเค้นโดยอาศัยสมการ (9) หรือ (10) ณ จุดพิกัดต่าง ๆ

2. คำนวณหาค่า σ_1 และ σ_2

3. คำนวณหาค่า ϕ, N_c และ N_p

4. สร้างภาพความเข้มแสงของริ้วโฟโตอีลาสติก โดยอาศัยสมการความเข้มแสงควบคุมตามหลักการเลื่อนเฟส 4 ขั้น

ลักษณะทางเรขาคณิตและขนาดของแรงหรือความเค้นที่กระทำต่อตัวแบบทั้งสอง ซึ่งใช้ในการจำลอง มีดังนี้

- สำหรับคานสี่เหลี่ยมอย่างง่ายรับแรงกระจายเอกรูป กำหนดให้ $p = 0.3$ นิวตัน/มิลลิเมตร^2, $l = 50$ มิลลิเมตร, $c = 10$ มิลลิเมตร และ $t = 10$ มิลลิเมตร
- สำหรับแผ่นเรียบบางมีรูกลมตรงกลางรับความเค้นเฉือนล้วน กำหนดให้ $S = 2.5$ เมกกะปาสคาล, $a = 50$ มิลลิเมตร และ พื้นที่เท่ากับ $2c \times 2c$ โดยที่ $c = 300$ มิลลิเมตร

สำหรับเงื่อนไขการจำลองหลังจากคำนวณแล้วเสร็จ ก็จะแปลงค่าต่าง ๆ ไปเป็นภาพ หรือที่เรียกว่า แผนภาพ (map) โดยทำการเปลี่ยนไปเป็นค่าสีในย่าน 0 ถึง 255 แบบเชิงเส้น

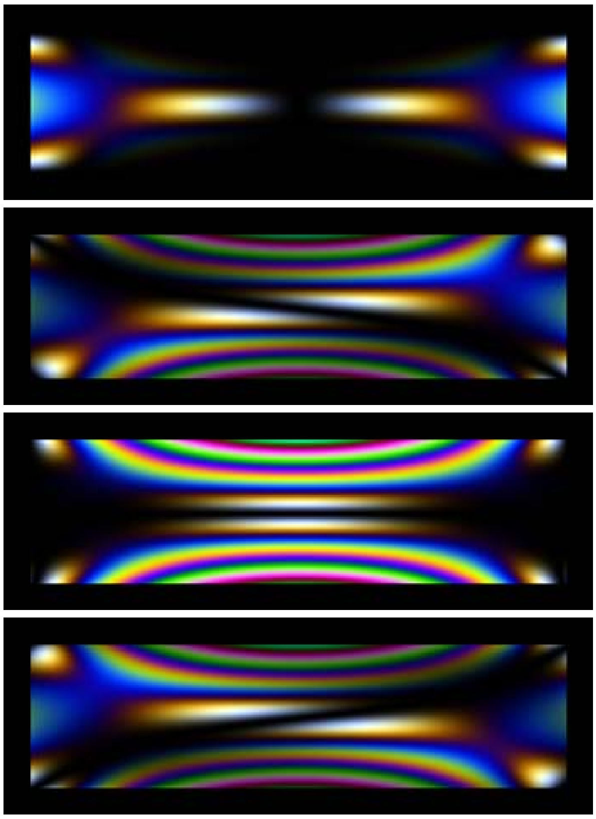
5. ผลลัพธ์และวิจารณ์

ในส่วนนี้จะนำเสนอผลลัพธ์ที่ได้จากการจำลองทั้งที่เป็นริ้วโฟโตอีลาสติก, แผนภาพ N_c, แผนภาพ N_p, แผนภาพ $(\sigma_1 - \sigma_2)$ และแผนภาพ $(\sigma_1 + \sigma_2)$

5.1 ริ้วโฟโตอิลาสติก

หลังจากแทนค่าต่าง ๆ ลงในสมการความเข้มแสงควบคุมแล้ว จะได้ภาพริ้วโฟโตอีลาสติกตามลำดับการเลื่อนเฟส 4 ขั้น รูปที่ 5 และ 6 แสดงริ้วโฟโตอีลาสติกของคานสี่เหลี่ยมอย่างง่ายรับแรงกระจายเอกรูป และแผ่นเรียบบางมีรูกลมตรงกลางรับความเค้นเฉือนล้วน

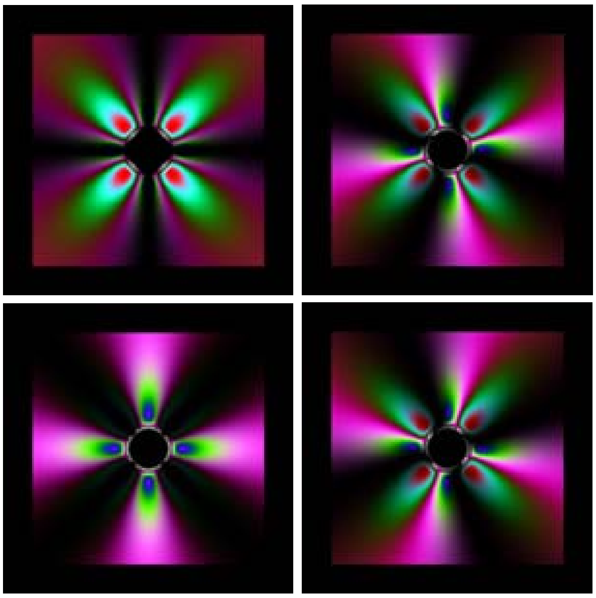
พิจารณารูปที่ 5 พบว่า ริ้วไอโซคลินิก (ริ้วสีดำ) จะพาดผ่านบริเวณกึ่งกลางของคานในทุก ๆ ลำดับภาพ ซึ่งแสดงให้เห็นว่า บริเวณดังกล่าวเป็นแนวแกนสะเทิน และที่แกนนี้จะมีจุดหรืออาณาบริเวณเอกลักษณ์ (isotropic points or region) ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไข $\sigma_1 = \sigma_2 \neq 0$ และ $(\sigma_1 - \sigma_2) = 0$ [7]



รูปที่ 5 ภาพสี (RGB) 24 บิต ขนาด 660 จุดภาพ × 220 จุดภาพ ของคานสี่เหลี่ยมอย่างง่ายรับแรงกระจายเอกรูปที่ได้จากการจำลองตามหลักการเลื่อนเฟส 4 ขั้น (เรียงตามลำดับจากบนลงล่าง)

สำหรับริ้วไอโซโครมาติก (ริ้วสีต่าง ๆ) นั้น จะมีลักษณะที่คล้ายกันทั้งความถี่และความโค้งที่ส่วนบนและส่วนล่าง (ดูภาพลำดับที่สามของรูปที่ 5) อย่างไรก็ตาม หากสังเกตโดยละเอียดแล้วจะพบว่า ริ้วไอโซ-โครมาติกด้านบนนั้นจะมีจำนวนมากกว่าด้านล่างเล็กน้อย กล่าวคือ ริ้วสีเขียวที่ผิวด้านบนจะมีพื้นที่มากกว่าริ้วสีเขียวด้านล่าง ลักษณะดังกล่าวนี้เป็นผลให้แนวแกนสะเทินเลื่อนลงมาทางด้านล่างเล็กน้อย

พิจารณารูปที่ 6 พบว่า ริ้วไอโซคลินิก (ริ้วสีดำ) จะมีลักษณะคล้ายกับกังหัน ซึ่งหมุนรอบจุดศูนย์กลางของรูกลม ลักษณะเช่นนี้สอดคล้องกับการหมุนของแผ่นโพลาไรซ์และแผ่นวิเคราะห์ในโพลาริสโคป จากภาพจะเห็นได้ว่า ริ้วสีดำไม่ได้ผ่านจุดใดจุดหนึ่งที่ซ้ำกันยกเว้นจุดศูนย์กลางซึ่งไม่มีเนื้อวัสดุ ดังนั้น ก็จะไม่



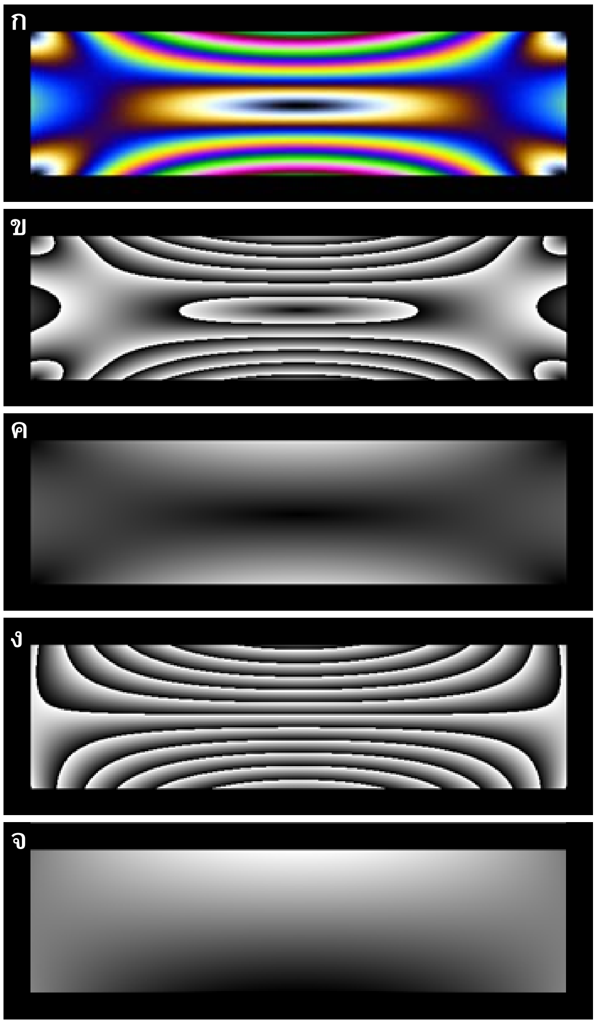
รูปที่ 6 ภาพสี (RGB) 24 บิต ขนาด 660 จุดภาพ × 660 จุดภาพ ของแผ่นเรียบบางมีรูกลมตรงกลางรับความเค้นเฉือนล้วนที่ได้จากการจำลองตามหลักการเลื่อนเฟส 4 ขั้น (เรียงตามลำดับจากซ้ายไปขวาและบนลงล่าง)

มีจุดหรืออาณาบริเวณเอกลักษณ์ อย่างไรก็ตาม จะมีจุดเอกพจน์ที่บริเวณขอบรูกลมหลาย ๆ จุด ซึ่ง ณ จุดเหล่านี้ สภาวะความเค้นจะเป็นไปตามเงื่อนไข $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ และ $(\sigma_1 - \sigma_2) = 0$ [7]

พิจารณาบริเวณขอบของรูกลม พบว่า ริ้วไอโซโครมาติกจะมีจำนวนมาก ซึ่งต่างจากบริเวณที่ห่างออกไปจากขอบรูกลม ลักษณะเช่นนี้แสดงให้เห็นว่าค่าผลต่างของความเค้นหลัก $(\sigma_1 - \sigma_2)$ จะมีการแปรเปลี่ยนไปอย่างรวดเร็วมากแบบไร้เชิงเส้น เมื่อจุดหรือตำแหน่งที่พิจารณาเข้าใกล้ขอบรูกลม

5.2 ริ้วไอโซโครมาติกและริ้วไอโซพาซิก

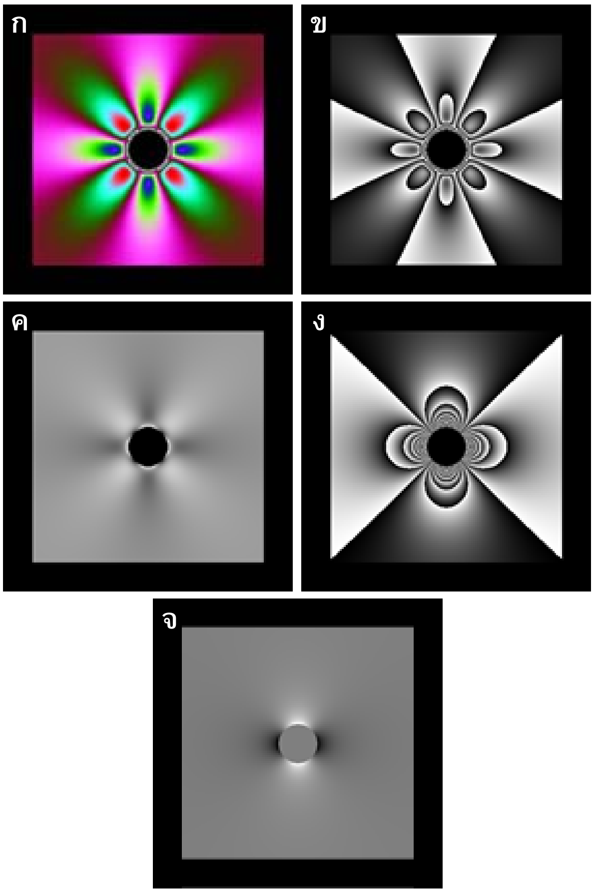
รูปที่ 7ก, 7ข และ 7ค แสดงแผนภาพไอโซโครมาติกซ่อนรูป (wrapped isochromatics), แผนภาพ $(\sigma_1 - \sigma_2)$ และ แผนภาพไอโซโครมาติกเต็มรูป (unwrapped isochromatics, N_c) ของคานสี่เหลี่ยมอย่างง่ายรับแรงกระจายเอกรูป ตามลำดับ โดยรูปที่ 7ก ได้จากวิธีการคำนวณตามหลักการเลื่อนเฟส [8]



รูปที่ 7 แผนภาพไอโซโครมาติก และไอโซพาซิก ของคานสี่เหลี่ยมอย่างง่ายรับแรงกระจายเอกรูป (ก) แผนภาพไอโซโครมาติก (ข) แผนภาพ $(\sigma_1 - \sigma_2)$ (ค) แผนภาพ N_c (ง) แผนภาพ $(\sigma_1 + \sigma_2)$ และ (จ) แผนภาพ N_p สำหรับริ้วในรูป (ข) ถึง (จ) เป็นภาพสีเขียว (G image) ที่แยกจากภาพสามสี (RGB image)

ส่วนรูปที่ 7ข และ 7ค คำนวณมาจากภาพสีเขียวของรูป 7ก

จากการพิจาณารูปทั้งสาม พบว่า อาณาบริเวณเอกลักษณ์จะอยู่ตรงกลางคาน โดยมีระดับต่ำลงมาเล็กน้อยตามที่ได้กล่าวแล้วในหัวข้อ 5.1 นอกจากนี้จากการพิจารณามุมทั้งสี่ของคานพบว่า ส่วนดังกล่าวเป็นส่วนที่ไม่มีความเค้นเกิดขึ้น ทั้งนี้เนื่องจากว่า $N_c = 0$ (สีดำ) ดังนั้น จุดทั้งสี่จึงเป็นจุดเอกพจน์ [7] ซึ่งสอดคล้องกับลักษณะการเปลี่ยนแปลงของริ้วตาม



รูปที่ 8 แผนภาพไอโซโครมาติก และไอโซพาซิก ของแผ่นเรียบบางมีรูกลมตรงกลางรับความเค้นเฉือนล้วน (ก) แผนภาพไอโซโครมาติก (ข) แผนภาพ $(\sigma_1 - \sigma_2)$ (ค) แผนภาพ N_c (ง) แผนภาพ $(\sigma_1 + \sigma_2)$ และ (จ) แผนภาพ N_p สำหรับริ้วในรูป (ข) ถึง (จ) เป็นภาพสีเขียว (G image) ที่แยกจากภาพสามสี (RGB image)

พิกัดตำแหน่ง (gradient) กล่าวคือ ริ้วจะเปลี่ยนจากสีดำไปเป็นสีขาว โดยเริ่มจากจุดหรืออาณาบริเวณเอกลักษณ์ และเอกพจน์ เป็นต้นไป ซึ่งในท้ายที่สุดผลลัพธ์ที่ได้ก็คือ รูปที่ 7ค

จากการพิจารณาแผนภาพ $(\sigma_1 + \sigma_2)$ และแผนภาพ N_p (รูปที่ 7ง และ 7จ ตามลำดับ) พบว่าลักษณะของแผนภาพ $(\sigma_1 + \sigma_2)$ จะมีความคล้ายคลึงกับแผนภาพ $(\sigma_1 - \sigma_2)$ โดยที่จำนวนริ้วของแผนภาพ $(\sigma_1 + \sigma_2)$ จะมีมากกว่าทั้งด้านบนและด้านล่าง นอกจากนี้ตำแหน่งหรืออาณาบริเวณไอโซทรอปิกไม่ปรากฏในแผนภาพ $(\sigma_1 + \sigma_2)$ ทั้งนี้เนื่องมาจากเงื่อนไขที่ได้กล่าวแล้วในหัวข้อ 5.1 กล่าวคือ ที่จุดหรืออาณาบริเวณเอกลักษณ์นั้น $\sigma_1 = \sigma_2 \neq 0$ และด้วยเหตุนี้ $(\sigma_1 + \sigma_2) \neq 0$

รูปที่ 8ก, 8ข และ 8ค แสดงแผนภาพไอโซโครมาติกซ่อนรูป, แผนภาพ $(\sigma_1 - \sigma_2)$ และ แผนภาพไอโซโครมาติกเต็มรูป N_c ของแผ่นเรียบบางมีรูกลมตรงกลางรับความเค้นเฉือนล้วน ตามลำดับ โดยรูปที่ 8ก ได้มาจากวิธีการคำนวณตามหลักการเลื่อนเฟส [8] ส่วนรูปที่ 8ข และ 8ค คำนวณมาจากภาพสีเขียวของรูปที่ 8ก

พิจาณารูปที่ 8ข และ 8ค พบว่า มีความสอดคล้องกัน กล่าวคือ บริเวณที่เป็นสีดำและขาว ในรูปที่ 8ค จะเกิดจากการแปรเปลี่ยนของริ้วตามพิกัดตำแหน่ง นอกจากนี้ บริเวณขอบของรูกลมมีค่าความเค้นที่สูงมากและมีจุดเอกพจน์สี่จุด ซึ่งมีตำแหน่งอยู่ในแนวกึ่งกลางของริ้วขนาดใหญ่ในรูปที่ 8ก (ริ้วที่มีมุมเอียงประมาณ 45° หรือ 135°) พิจารณารูปที่ 8ค อีกครั้ง พบว่าบริเวณที่ห่างออกไปจากรูกลมจะเป็นสีเทา ซึ่งลักษณะเช่นนี้สอดคล้องกับปัญหาที่รับความเค้นเฉือนล้วน กล่าวคือ ที่บริเวณดังกล่าว ค่าของ σ_1 หรือ σ_2 จะเท่ากันแต่ σ_1 จะเป็นความเค้นดึงในขณะที่ σ_2 เป็นความเค้นอัด ซึ่งทำให้ $(\sigma_1 - \sigma_2) = 2S$

พิจารณาแผนภาพ $(\sigma_1 + \sigma_2)$ และ N_p (รูปที่ 8ง และ 8จ ตามลำดับ) พบว่า มีความสอดคล้องกันในเรื่องของการแปรเปลี่ยนของริ้วต่อพิกัดตำแหน่งดังกล่าวแล้วข้างต้น นอกจากนี้ ที่บริเวณขอบรูกลมความเค้นจะมีค่าสูงมากกว่าความเค้นในรูปที่ 8ค เมื่อเปรียบเทียบจำนวนริ้วบริเวณขอบรูกลม

6. สรุปผล

บทความนี้ได้นำเสนอการจำลองสนามความเค้นของปัญหาคานสี่เหลี่ยมอย่างง่ายรับแรงกระจายเอกรูป และแผ่นเรียบบางมีรูกลมตรงกลางรับความเค้นเฉือนล้วน การจำลองอาศัยหลักการโฟโตอีลาสติกซิตีเชิงเลขร่วมกับผลเฉลยแม่นตรงของปัญหาดังกล่าวจากทฤษฎีสภาพยืดหยุ่น ผลการจำลองทำให้ริ้วโฟโตอีลาสติกและริ้วไอโซพาซิก ภาพริ้วโฟโตอีลาสติกทำ

ให้เห็นอาณาบริเวณที่ความเค้นมีค่าสูง ซึ่งทำให้เห็นลักษณะของความหนาแน่นของความเค้น

การจำลองสนามความเค้นสำหรับสองปัญหานี้จะทำให้มีสนามความเค้นเพิ่มมากขึ้นจากที่ได้นำเสนอไว้แล้ว [1, 2] ซึ่งจะก่อให้เกิดประโยชน์หลัก ๆ สองด้านในอนาคต ดังนี้

- ด้านการเรียนการสอน: สามารถนำภาพสนามความเค้นเหล่านี้ไปประกอบการเรียนการสอนในรายวิชากลศาสตร์วัสดุและทฤษฎีสภาพยืดหยุ่น โดยเฉพาะอย่างยิ่งในหัวเรื่อง ความหนาแน่นของความเค้น นอกจากนี้การจำลองนี้ถูกเขียนขึ้นเป็นโปรแกรม [9] ดังนั้นการนำโปรแกรมไปใช้จะทำให้ผู้เรียนเห็นลักษณะสนามความเค้นที่แปรเปลี่ยนไปตามการเปลี่ยนแปลงตัวแปรต่าง ๆ ที่ใช้ควบคุมการจำลอง ซึ่งจะส่งผลให้ผู้เรียนเข้าใจมโนทัศน์เกี่ยวกับสนามความเค้นเพิ่มมากขึ้น
- ด้านงานอุตสาหกรรม: สามารถนำภาพสนามความเค้นเหล่านี้ไปใช้เป็นตัวแบบมาตรฐานในการทดสอบวิธีการต่าง ๆ ที่มีอยู่แล้วหรือที่กำลังจะสร้างขึ้นเพื่อการวิเคราะห์ตัวแปรโฟโตอีลาสติกซิตีเชิงเลขของภาพสนามความเค้นจริง (stress field in real world) ทั้งในเรื่องของ ความถูกต้องของค่าเชิงตัวเลขและความรวดเร็วในการคำนวณ ซึ่งจะเป็นการเพิ่มศักยภาพการแก้ปัญหาการออกแบบชิ้นส่วนทางกล

7. เอกสารอ้างอิง

[1] ศรัณยู มั่นพิศุทธิ์ และ พิเชษฐ์ พินิจ (2551). การตรวจสอบผลเฉลยจากทฤษฎีสภาพยืดหยุ่นของแผ่นวงแหวนรับแรงเข้มกดตรงกันข้ามตามแนวเส้นผ่านศูนย์กลางด้วยวิธีวิเคราะห์ความเค้นในช่วงยืดหยุ่นโดยแสงเชิงดิจิตอล, *การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 22*, มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ศูนย์รังสิต กรุงเทพ ฯ

[2] ศรัณยู มั่นพิศุทธิ์ และ พิเชษฐ์ พินิจ (2551). การจำลองภาพสนามความเค้นสองมิติของแผ่นเรียบบางขนาดใหญ่ที่มีรูกลมตรงกลาง, *การประชุมวิชาการครุศาสตร์อุตสาหกรรมแห่งชาติ ครั้งที่ 3*, โรงแรมเอส ดี อเวนิว, กรุงเทพ ฯ

[3] Sadowsky, M.A. 1941. Classification of Isotropic Points as Defined by $(\sigma_1 - \sigma_2) = 0$ within a Regular Region. *Journal of Applied Physics*, vol. 12, August 1941, pp. 605-609.

[4] Ramesh, K. 2000. *Digital Photoelasticity: Advanced Technique and Applications*, Springer, Berlin Germany.

[5] Gdoutos, E.E. (2007). Study the caustics, isochromatic and isopachic fringes at a bi-material interface crack-tip, paper presented in *the 13th International Conference on Experimental Mechanics (ICEM13)*, Alexandroupolis, Greece.

[6] Volterra, E. and Gaines, J.H. (1971). *Advanced Strength of Materials*, Prentice-Hall, New Jersey, U.S.A.

[7] พิเชษฐ์ พินิจ (2552). การค้นหาภาวะไร้ความต่อเนื่องในแผนภาพไอโซคลินิกในวิธีวิเคราะห์ความเค้นในช่วงยืดหยุ่นด้วยแสงเชิงดิจิทัล, *วารสารวิจัยและพัฒนา มจธ*, 32(1), มกราคม 2552, หน้า 89-103

[8] Pinit, P. and Umezaki, E. (2008). Absolute Fringe Order Determination in Digital Photoelasticity, Journal of Solid Mechanics and Materials Engineering, vol. 2(4), pp. 519-529.

[9] Pinit, P. (2009). Development of Windows-based program for analysis and visualization of two-dimensional stress field in digital photoelasticity, Songklanakarin Journal of Science and Technology, vol. 31(2), Mach. [in press]