



# โฟโตอีลาสติคซิติเชิงเลข ภาค 1: การได้มาซึ่งสมการความเข้มแสงควบคุม สำหรับโพลาริสโคปแบบแสงโพลาริซ์ระนาบบนฐานตรีโกณมิติ

## Digital Photoelasticity Part 1: Deriving the Governing Intensity Equations for Plane Polariscopes Based on Trigonometric Resolution

พิเชษฐ์ พิณีจ<sup>1</sup>

### 1. บทนำ

โฟโตอีลาสติคซิติจัดเป็นวิธีการหนึ่งที่มีความสำคัญอย่างมากสำหรับการวิเคราะห์ความเค้น ในอดีตที่ผ่านมา แม้ว่าโฟโตอีลาสติคซิติสามารถวิเคราะห์ความเค้นได้ดีในรูปของข้อมูลเชิงสนาม วิธีนี้ก็ยังมีข้อจำกัดอยู่หลายประการ เช่น ผู้วิเคราะห์ข้อมูลจะต้องมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับทฤษฎีโฟโตอีลาสติคซิติอย่างลึกซึ้งเพื่อการแปลความหมายของริ้วความเค้นที่เกิดขึ้น นอกจากนี้ลักษณะการเกิดริ้วนั้นไม่สามารถอธิบายด้วยสมการทางคณิตศาสตร์ได้ทั้งหมดจึงทำให้วิธีนี้ไม่ได้รับการสนใจเท่าที่ควร [1] ผลจากการผสมผสานระหว่างโฟโตอีลาสติคซิติกับอุปกรณ์ฮาร์ดแวร์ต่างๆ ทางด้านคอมพิวเตอร์รวมทั้งซอฟต์แวร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ทำให้เกิดสาขาใหม่ที่มีชื่อเรียกว่า โฟโตอีลาสติคซิติเชิงเลข (Digital Photoelasticity) วิธีใหม่นี้ทำให้การวิเคราะห์ความเค้นมีประสิทธิภาพเพิ่มมากขึ้น [2]

เนื่องจากมีการใช้อุปกรณ์ฮาร์ดแวร์ เช่น กล้องบันทึกภาพในการบันทึกภาพริ้วความเค้นเพื่อนำไปวิเคราะห์ความเค้นและกล้องบันทึกภาพก็ทำงานโดย

การบันทึกความเข้มแสง จากเหตุผลดังกล่าวข้างต้นบทความนี้จะแสดงให้เห็นถึงการได้มาซึ่งสมการความเข้มแสงควบคุมในโฟโตอีลาสติคซิติเชิงเลขบนฐานตรีโกณมิติที่ซึ่งกล้องถ่ายภาพสามารถบันทึกได้ สมการดังกล่าวนี้เป็นสมการทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญที่เป็นฟังก์ชันของขนาดและทิศทางของความเค้นหลัก ซึ่งจะใช้อธิบายลักษณะการเกิดริ้วความเค้น

บทความนี้จะนำเสนอขั้นตอนการได้มาของสมการความเข้มแสงควบคุมอย่างเป็นระบบเพื่อให้ผู้ที่สนใจสามารถเข้าใจโฟโตอีลาสติคซิติเชิงเลขได้อย่างถูกต้องและใช้เป็นความรู้เบื้องต้นก่อนการศึกษาเชิงลึกต่อไป

### 2. โพลาริสโคปและแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

#### 2.1 โพลาริสโคป

การบันทึกภาพเชิงเลขจำเป็นต้องบันทึกภาพผ่านอุปกรณ์ทางแสงที่เรียกว่า โพลาริสโคป (Polariscopes) ซึ่งโดยทั่วไปแล้วแบ่งออกได้ 3 ชนิด คือ [2]

- โพลาริสโคปแบบใช้แสงโพลาริซ์ระนาบ
- โพลาริสโคปแบบใช้แสงโพลาริซ์วงกลม และ
- โพลาริสโคปผสมแบบใช้แสงโพลาริซ์วงกลม

<sup>1</sup> อาจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี โทรศัพท์ 0-2470-8522 E-mail: pichet.pin@kmutt.ac.th

แบบแรกนั้นเป็นโพลาไรสโคปแบบง่ายที่สุด (รูปที่ 1) ที่ประกอบไปด้วยแหล่งกำเนิดแสง (แสงเอกรงค์และ/หรือแสงพหุรงค์และ/หรือแสงสีขาว) แผ่นโพลาไรซ์ (Polarizer) แผ่นวิเคราะห์ (Analyzer) ส่วนแบบที่สองนั้นคล้ายกับแบบแรก เพียงแต่มีแผ่นเลี้ยวคลื่น (Quarter-wave Plate) เพิ่มขึ้นมาจำนวนสองแผ่น โดยแผ่นเลี้ยวคลื่นจะทำให้แสงที่ผ่านตัวมันกลายเป็นแสงโพลาไรซ์วงกลมสำหรับแบบสุดท้ายเป็นแบบผสมระหว่างแบบแรกกับแบบที่สองโดยจะมีแผ่นเลี้ยวคลื่นเพียงแผ่นเดียว ซึ่งการวางตำแหน่งของแผ่นเลี้ยวคลื่นนี้จะมีทั้งแบบที่วางอยู่หลังแผ่นโพลาไรซ์หรือวางอยู่หลังตัวแบบ (Model) [2] อย่างไรก็ตาม สำหรับบทความฉบับนี้จะเน้นเฉพาะโพลาไรสโคปแบบแรกเท่านั้น

สำหรับการจัดเรียงองค์ประกอบทางแสงต่างๆ ในโพลาไรสโคปแบบใช้แสงโพลาไรซ์ระนาบที่นิยมใช้ในการศึกษาทางด้านโฟโตอีลาสติคิตีเชิงเลขสามารถจัดเรียงได้ดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 การจัดเรียงโพลาไรสโคปแบบใช้แสงโพลาไรซ์ระนาบ [2]

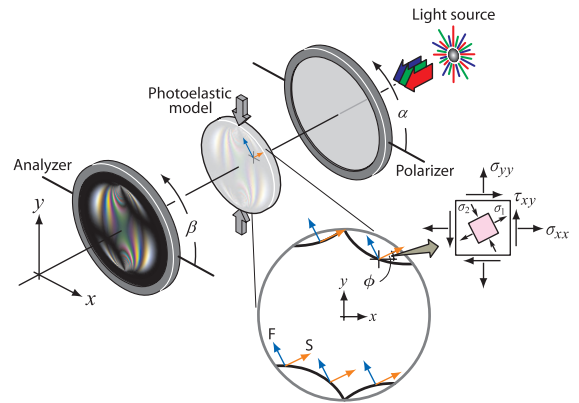
การจัดเรียง	แผ่นโพลาไรซ์และแผ่นวิเคราะห์*	แผ่นเลี้ยวคลื่น	สนามแสงจากหลัง
โพลาไรสโคปแบบแสงโพลาไรซ์ระนาบ	ตั้งฉาก	ไม่มี	มืด
	ขนาน	ไม่มี	สว่าง

\* พิจารณาตามแนวแกนทัศน

## 2.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของความเข้มแสง

พิจารณาแสงซึ่งเคลื่อนที่ผ่านโพลาไรสโคปแบบแสงโพลาไรซ์ระนาบ (รูปที่ 1) ความเข้มแสง  $I$  ณ จุดพิกัด  $(x, y)$  ใดๆ เมื่อเรามองผ่านแผ่นวิเคราะห์ (Analyzer) สามารถแสดงออกมาเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้ [3]

$$I = f(\alpha, I_p, \phi, N, \beta, h, f_\sigma, I_b) \quad (1)$$



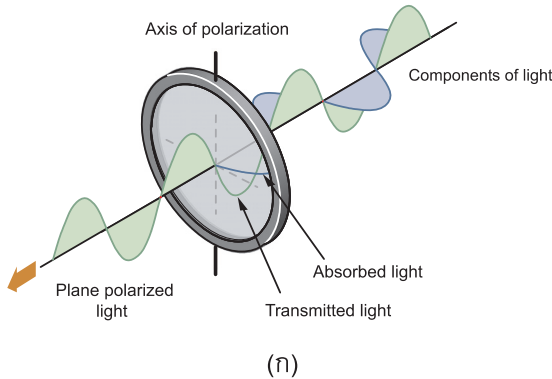
รูปที่ 1 โพลาไรสโคปแบบแสงโพลาไรซ์พร้อมทั้งตัวแบบภายใต้การกระทำของแรงกด

โดยที่  $I_p(x, y; \lambda)$  แทนความเข้มแสงโพลาไรซ์ที่ผ่านออกมาจากแผ่นโพลาไรซ์ (Polarizer),  $\phi(x, y; \alpha, \beta)$  แทนตัวแปรไอโซคลินิก (Isoclinic Parameter) หรือทิศทางความเค้นหลัก  $\sigma_1$  โดยเทียบกับแกนอ้างอิงตามแนวแกน  $x$ ,  $N(x, y; (\sigma_1 - \sigma_2))$  แทนอันดับรีวีหรือตัวแปรไอโซโครมาติก (Isochromatic Parameter),  $h$  แทนความหนาของตัวแบบ  $f_\sigma(\lambda)$  แทนค่าสัมประสิทธิ์รีวีความเค้นของวัสดุซึ่งสามารถหาได้จากวิธีการสอบเทียบ (Calibration)  $I_b(x, y; \lambda)$  แทนความเข้มแสงจากหลังและ  $\lambda$  แทนความยาวคลื่นแสงของแหล่งกำเนิดแสง

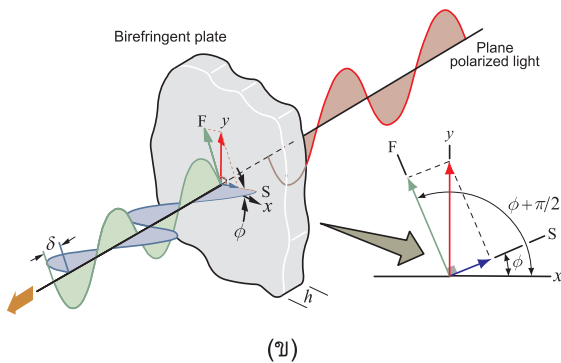
ความสัมพันธ์ระหว่างอันดับรีวีกับตัวแปรทวนซ้ำสัมพัทธ์หรือเฟส (Relative Retardation or Phase,  $\delta$ ) สามารถกำหนดได้ดังนี้ [2]

$$\delta = 2\pi N \quad \text{และ} \quad (\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{f_\sigma N}{h} \quad (2)$$

โดยที่อันดับรีวี  $N$  และเฟส  $\delta$  จะสัมพันธ์โดยตรงกับค่าผลต่างของความเค้นหลัก  $(\sigma_1 - \sigma_2)$  เพื่อให้ง่ายต่อการเขียนสมการทางคณิตศาสตร์ ตัวแปรอิสระต่างๆ เช่น พิกัด  $(x, y)$  ความหนา  $h$  ของตัวแบบหรือค่าความยาวคลื่น  $\lambda$  ของแหล่งกำเนิดแสงจะถูกละไว้ในฐานที่เข้าใจ



(ก)



(ข)

**รูปที่ 2** พฤติกรรมทางกายภาพที่เกี่ยวกับแสงของอุปกรณ์ทางแสงต่างๆ ในโพลาไรสโคป (ก) แผ่นโพลาไรซ์หรือแผ่นวิเคราะห์ และ (ข) แผ่นหักเหซ้อนหรือตัวแบบ

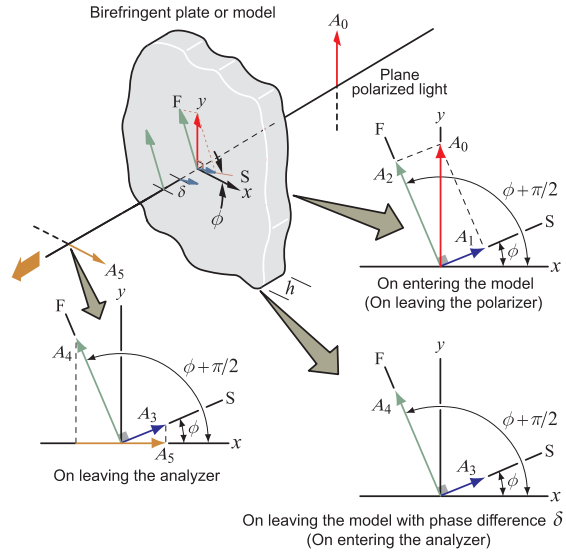
### 3. พฤติกรรมทางกายภาพของอุปกรณ์ทางแสงในโพลาไรสโคป

#### 3.1 แผ่นโพลาไรซ์และแผ่นวิเคราะห์

รูปที่ 2ก แสดงพฤติกรรมของแผ่นโพลาไรซ์หรือแผ่นวิเคราะห์ในการกรองลำแสงที่เคลื่อนที่ผ่านตามแนวแกนทศน์ (Axis of Polarization) โดยที่ลำแสงที่เคลื่อนที่ออกจากแผ่นโพลาไรซ์หรือแผ่นวิเคราะห์ จะกลายเป็นแสงโพลาไรซ์ที่สั้นในแนวแกนทศน์ดังกล่าว โดยที่เฟสของแสงโพลาไรซ์จะไม่มีเปลี่ยนแปลง

#### 3.2 แผ่นหักเหซ้อนหรือตัวแบบ

รูปที่ 2ข แสดงพฤติกรรมของแผ่นหักเหซ้อนในการแยกลำแสงที่ตกกระทบเป็นสององค์ประกอบที่ตั้งฉาก



**รูปที่ 3** การเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์แสงเมื่อเคลื่อนที่ผ่านโพลาไรสโคปแบบฉากหลังมืด

ซึ่งกันและกัน เมื่อลำแสงทั้งสองออกจากแผ่นหักเหซ้อนแล้วก็จะเกิดความแตกต่างระหว่างเฟสขึ้น โดยที่ผลต่างของเฟสซึ่งก็คือ  $\sigma$  จะสัมพันธ์โดยตรงกับผลต่างของความเค้นหลัก ( $\sigma_1 - \sigma_2$ ) ดังที่กล่าวแล้ว (ดูรูปที่ 1 และสมการ (3) ประกอบกัน)

### 4. สมการความเข้มแสงควมคุม

จากหัวข้อที่ 2 และ 3 เราได้ทราบเกี่ยวโพลาไรสโคปและพฤติกรรมเชิงแสงต่างๆ ของอุปกรณ์หรือชิ้นส่วนที่อยู่ในโพลาไรสโคป ในหัวข้อนี้เราจะประยุกต์ใช้ความรู้ดังกล่าวในการหาสมการความเข้มแสงควมคุม

#### 4.1 สมการความเข้มแสงควมคุมแบบฉากหลังมืด

พิจารณาโพลาไรสโคปในรูปที่ 3 กรณีที่แหล่งกำเนิดแสงให้แสงเอกรงค์ไว้รูปแบบที่เป็นสีแดงออกมาเมื่อลำแสงนี้ผ่านแผ่นโพลาไรซ์ก็จะทำให้ได้แสงโพลาไรซ์ระนาบตามแนวแกนทศน์ของแผ่นโพลาไรซ์ดังกล่าว หากเรากำหนดให้มุม  $\alpha = 90^\circ$  และมุม  $\beta = 0^\circ$  ก็จะได้ขนาดของเวกเตอร์แสงเป็น [2]

$$A_0 = a \cos \omega t \quad (3)$$

โดยที่  $A_0$  แทนองค์ประกอบของเวกเตอร์แสงที่สั้นในแนวแกนทศน์ของแผ่นโพลาริซ  $a$  แทนแอมพลิจูดของเวกเตอร์แสง  $\omega$  แทนอัตราเร็วเชิงมุมของแสงและ  $t$  แทนเวลาในการเคลื่อนที่ของแสง

เมื่อแสงโพลาริซเคลื่อนที่เข้าสู่ตัวแบบ (Entering the Model) ก็แยกตัวออกเป็นแสงสององค์ประกอบที่ตั้งฉากซึ่งกันและกันตามทิศทางของความเค้นหลัก  $\sigma_1$  และ  $\sigma_2$  หรือตามแนวแกนทศน์ช้า (S) และแกนทศน์เร็ว (F) ของตัวแบบตามลำดับ โดยขนาดของเวกเตอร์ทั้งสององค์ประกอบนั้น คือ

$$A_{1,S} = a \sin \phi \cos \omega t \quad (4)$$

$$A_{2,F} = a \cos \phi \cos \omega t \quad (5)$$

หลังจากที่องค์ประกอบเวกเตอร์ทั้งสองเคลื่อนที่ออกจากตัวแบบ (Leaving the Model) แล้ว ก็จะเกิดการเคลื่อนที่ช้าเร็วต่างกันด้วยค่าเฟส  $\delta$  และถ้าหากเรากำหนดให้การเคลื่อนที่ช้าเร็วต่างกันของแสงนี้เป็นแบบเอกรูป (Uniform) เราก็จะได้องค์ประกอบของแสงที่มีเฟสต่างกัน คือ

$$A_{3,S} = a \sin \phi \cos \left( \omega t - \frac{\delta}{2} \right) \quad (6)$$

$$A_{4,F} = a \cos \phi \cos \left( \omega t + \frac{\delta}{2} \right) \quad (7)$$

เนื่องจากว่าแผ่นวิเคราะห์จะยอมให้ลำแสงผ่านได้เฉพาะองค์ประกอบที่เคลื่อนที่ตามแนวแกนทศน์ของตัวมันเองเท่านั้น ด้วยเหตุนี้

$$\begin{aligned} A_5 &= A_3 \cos \phi - A_4 \sin \phi \\ &= a \sin \phi \cos \phi \cos \left( \omega t - \frac{\delta}{2} \right) \\ &\quad - a \sin \phi \cos \phi \cos \left( \omega t + \frac{\delta}{2} \right) \\ &= \frac{a}{2} \sin 2\phi \left[ \cos \omega t \cos \frac{\delta}{2} + \sin \omega t \sin \frac{\delta}{2} \right] \\ &\quad - \frac{a}{2} \sin 2\phi \left[ \cos \omega t \cos \frac{\delta}{2} - \sin \omega t \sin \frac{\delta}{2} \right] \\ &= a \sin 2\phi \sin \frac{\delta}{2} \sin \omega t \end{aligned} \quad (8)$$

ความเข้มแสงที่เราสามารถมองเห็นหรือที่อุปกรณ์บันทึกภาพสามารถบันทึกได้จะขึ้นอยู่กับกำลังสองของแอมพลิจูดของเวกเตอร์แสง ดังนั้น ความเข้มแสงที่ผ่านออกจากแผ่นวิเคราะห์ ก็คือ

$$\begin{aligned} I_d &= a^2 \sin^2 2\phi \sin^2 \frac{\delta}{2} \\ &= I_p \sin^2 2\phi \sin^2 \frac{\delta}{2} \end{aligned} \quad (9)$$

โดยที่  $I_p (= a^2)$  คือแสงโพลาริซที่เคลื่อนที่ออกจากแผ่นโพลาริซตั้งที่กล่าวแล้วข้างต้น

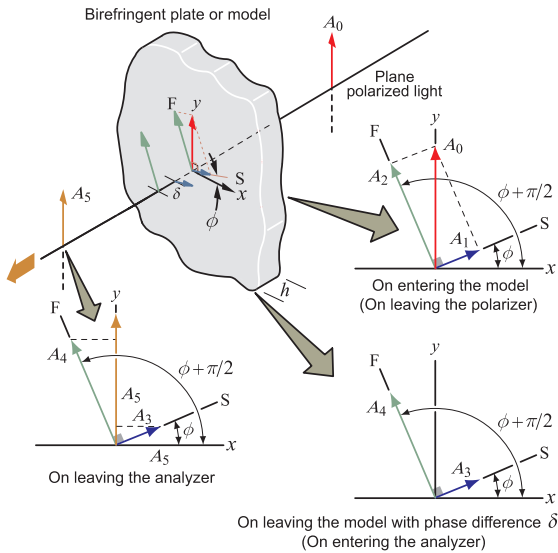
เนื่องจากว่าความเข้มแสงฉากหลัง  $I_b$  นั้นเป็นความเข้มแสงของแสงธรรมชาติรอบๆ โพลาริซโคปซึ่งผ่านเข้ามาและทำให้เรามองเห็นได้แม้ว่าเราจะจัดตำแหน่งให้แกนทศน์ของแผ่นโพลาริซและแผ่นวิเคราะห์ตั้งฉากซึ่งกันและกันก็ตาม สมการความเข้มแสงควบคุมแบบฉากหลังมืดของโพลาริซโคปแบบแสงโพลาริซระนาบ (สมการ (10)) เมื่อรวมผลของความเข้มแสงฉากหลังจึงสามารถเขียนได้ใหม่ดังนี้

$$\begin{aligned} I_d &= I_p \sin^2 \frac{\delta}{2} \sin^2 2\phi + I_b \\ &= I_p \sin^2 \pi N \sin^2 2\phi + I_b \end{aligned} \quad (10)$$

พึงสังเกตว่า การปรากฏขึ้นของความเข้มแสงฉากหลัง  $I_b$  ในสมการ (10) นั้น ส่งผลให้การคำนวณหาค่าตัวแปรไอโซคลินิก  $\phi$  และตัวแปรไอโซโครมาติกหรือเฟส  $\delta$  หรืออันดับรีวิ  $N$  มีความยุ่งยากซับซ้อนมากยิ่งขึ้น อย่างไรก็ตาม ผลลัพธ์ที่ได้จะมีความถูกต้องเชิงตัวเลขมากกว่าการที่ไม่คิดอิทธิพลของความเข้มแสงฉากหลัง  $I_b$  (การใช้สมการ (9)) [2]

#### 4.2 สมการความเข้มแสงควบคุมแบบฉากหลังสว่าง

พิจารณารูปที่ 4 เมื่อมุม  $\alpha = 90^\circ$  และ  $\beta = 90^\circ$  เราก็จะพบว่าขนาดขององค์ประกอบเวกเตอร์ทั้งสองนั้นจะมีลักษณะที่เหมือนกับกรณีฉากหลังมืดตั้งแต่ที่เคลื่อนผ่านออกมาจากแผ่นโพลาริซและตัวแบบ ดังนั้น ขนาดของเวกเตอร์แสงที่เคลื่อนที่ออกจากแผ่นวิเคราะห์ ก็คือ



รูปที่ 4 การเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์แสงเมื่อเคลื่อนที่ผ่านโพลาไรซ์โคปแบบฉากหลังสว่าง

$$\begin{aligned}
 A_5 &= A_3 \sin \phi + A_4 \cos \phi \\
 &= a \sin^2 \phi \cos \left( \omega t - \frac{\delta}{2} \right) \\
 &\quad + a \cos^2 \phi \cos \left( \omega t + \frac{\delta}{2} \right) \\
 &= a \sin^2 \phi \left[ \cos \omega t \cos \frac{\delta}{2} + \sin \omega t \sin \frac{\delta}{2} \right] \\
 &\quad + a \cos^2 \phi \left[ \cos \omega t \cos \frac{\delta}{2} - \sin \omega t \sin \frac{\delta}{2} \right] \\
 &= a \cos \frac{\delta}{2} \cos \omega t \\
 &\quad + a \sin \frac{\delta}{2} \left[ \sin^2 \phi - \cos^2 \phi \right] \sin \omega t \\
 &= a \cos \frac{\delta}{2} \cos \omega t - a \sin \frac{\delta}{2} \cos 2\phi \sin \omega t \\
 &= E \cos(\omega t + \gamma)
 \end{aligned} \tag{11}$$

โดยที่

$$E = \sqrt{\left(-a \sin \frac{\delta}{2} \cos 2\phi\right)^2 + \left(a \cos \frac{\delta}{2}\right)^2} \tag{12}$$

$$\tan \gamma = \frac{-\sin \frac{\delta}{2} \cos 2\phi}{\cos \frac{\delta}{2}} = -\tan \frac{\delta}{2} \cos 2\phi \tag{13}$$

ทั้งนี้  $E$  แทนแอมพลิจูดของคลื่นแสงที่รวมตัวกันตามแนวแกนทศน์ของแผ่นวิเคราะห์และ  $\gamma$  แทนเฟส

เริ่มต้นของคลื่นแสงตั้งกล่าว

เนื่องจากความเข้มแสงจะมีค่าเท่ากับกำลังสองของแอมพลิจูดตั้งที่กล่าวแล้ว ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 I_1 &= a^2 \cos^2 \frac{\delta}{2} + a^2 \sin^2 \frac{\delta}{2} \cos^2 2\phi \\
 &= a^2 \left(1 - \sin^2 \frac{\delta}{2}\right) + a^2 \sin^2 \frac{\delta}{2} \left(1 - \sin^2 2\phi\right) \\
 &= a^2 \left[1 - \sin^2 \frac{\delta}{2} \sin^2 2\phi\right] \\
 &= I_p \left[1 - \sin^2 \frac{\delta}{2} \sin^2 2\phi\right]
 \end{aligned} \tag{14}$$

ซึ่งเมื่อรวมผลของความเข้มแสงจากหลังเข้าไปในสมการ (14) แล้ว เราก็จะได้สมการความเข้มแสงควบคุมแบบฉากหลังสว่างของโพลาไรซ์โคปแบบฉากโพลาไรซ์ระนาบ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 I_l &= I_p \left[1 - \sin^2 \frac{\delta}{2} \sin^2 2\phi\right] + I_b \\
 &= I_p \left[1 - \sin^2 \pi N \sin^2 2\phi\right] + I_b
 \end{aligned} \tag{15}$$

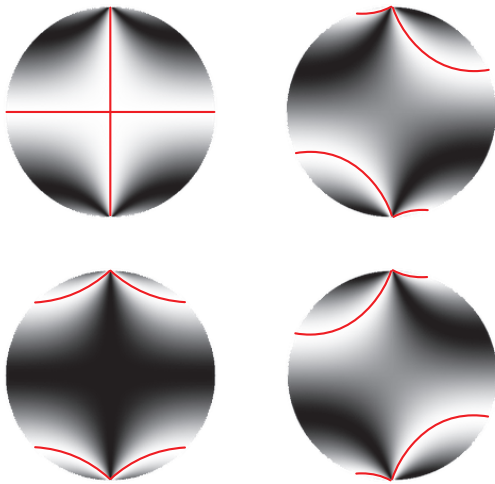
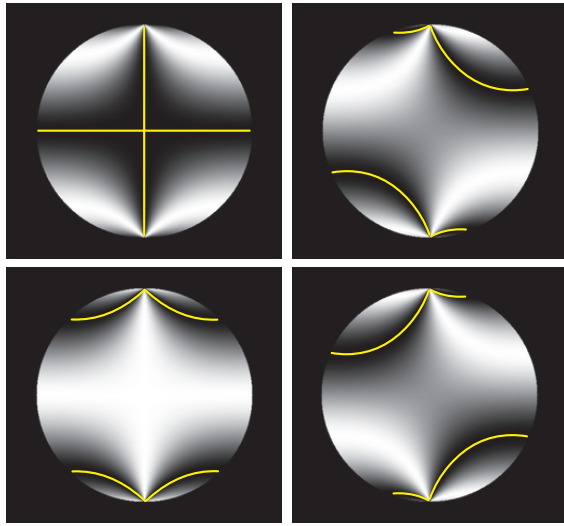
#### 4.3 การแปลความหมายของสมการความเข้มแสงควบคุม

พิจารณาสมการความเข้มแสงควบคุม (10) และ/หรือ (15) จะเห็นได้ว่า เราสามารถแบ่งการพิจารณาออกได้สองกรณีตามตัวแปรไอโซคลินิก  $\phi$  และตัวแปรไอโซโครมาติก  $\delta$  ดังนี้

##### 4.3.1 ตัวแปรไอโซคลินิก: $\sin^2 \phi = 20=0$

รูปที่ 5 แสดงภาพสนามไอโซคลินิกของตัวแบบแผ่นกลมรับแรงเข้มกดในแนวเส้นผ่านศูนย์กลางที่เป็นไปตามเงื่อนไข  $\sin^2 2\phi = 0$  หรือ  $2\phi = 0^\circ$  หรือ  $180^\circ$  ซึ่งกล่าวได้อีกนัยหนึ่งว่า เงื่อนไขนี้จะเกิดขึ้นเมื่อ  $\phi = 0^\circ$  หรือ  $90^\circ$  หรือเมื่อแกนทศน์ของแผ่นโพลาไรซ์หรือแผ่นวิเคราะห์ซ้อนทับกับทิศทางความเค้นหลัก  $\sigma_1$  และ/หรือ  $\sigma_2$  ณ จุดใดๆ ในตัวแบบ จุดเหล่านี้จะเรียงตัวกันเป็นริ้วสีดำที่เรียกว่า ริ้วไอโซคลินิก

เงื่อนไขนี้ส่งผลให้ความเข้มแสงแบบฉากหลังมืด  $I_d$  มีค่าต่ำสุด (เส้นสีเหลืองในรูปที่ 5) และจะปรากฏเป็นริ้วสีดำ (มืด) ที่มีความต่อเนื่องทั่วทั้งตัวแบบ สำหรับการแปรเปลี่ยนของริ้วไอโซคลินิกจากตำแหน่งที่มีสีดำ



**รูปที่ 5** การเปลี่ยนตำแหน่งของรีวไอโซคลินิกที่เป็นไปตามเงื่อนไข  $\sin^2 2\phi = 0$  ตามค่ามุม  $\beta = 0^\circ, 22.5^\circ, 45^\circ$  และ  $67.5^\circ$  ตามลำดับ (เรียงลำดับจากซ้ายไปขวาและบนลงล่าง) ซึ่งจัดเรียงแบบฉากหลังมืด (สีภาพบน) โดยที่  $\alpha = \beta + 90^\circ$  และแบบฉากหลังสว่าง (สีภาพล่าง) โดยที่  $\alpha = \beta$  สำหรับเส้นสีเหลืองและสีแดงที่จะแสดงตำแหน่งของรีวไอโซคลินิกตามเงื่อนไขข้างต้นในสมการ (10) และ (15) ตามลำดับ

ที่สุดและค่อยๆ เลือน (Fade) จากสีดำไปเป็นสีขาวก็เป็นผลมาจากฟังก์ชันไซน์นั่นเอง เนื่องจากเงื่อนไขจะเกิดขึ้นเมื่อเกิดการซ้อนทับกันระหว่างแกนทัศนและทิศทางการเคลื่อนที่ ดังนั้น เมื่อเราหมุนแผ่นโพลาริซซ์และแผ่นวิเคราะห์ไปพร้อมๆ กันในขณะที่แกนทัศนของแผ่นทั้งสองยังตั้งฉากกัน รีวไอโซคลินิกก็จะเคลื่อนที่ไปยังตำแหน่งอื่นๆ ซึ่งยังคงทำให้สมการ (10) เป็นจริง

สำหรับผลลัพธ์ที่ได้จากสมการ (15) นั้นจะมีลักษณะเช่นเดียวกันกับที่ได้อธิบายแล้ว อย่างไรก็ตามลักษณะของรีวไอโซคลินิกก็จะเปลี่ยนไป กล่าวคือรีวสีดำจะกลายเป็นสีขาว ซึ่งก็เป็นไปตามเงื่อนไขทางคณิตศาสตร์ของสมการ (15) ลักษณะเช่นนี้จะทำให้ความเข้มแสงมีค่าสูงสุด (เส้นสีแดงในรูปที่ 5) สาเหตุที่เป็นเช่นนี้ก็เนื่องมาจากว่า เราพิจารณาเฉพาะพจน์  $\sin^2 2\phi$  เท่านั้น ซึ่งเป็นผลให้สมการ (15) กลายเป็น  $I_p \cos^2 2\phi + I_b$  อย่างไรก็ตาม จะเห็นได้ว่าเงื่อนไขการเกิดรีวไอโซคลินิกก็ยังคงเป็นเช่นเดิม กล่าวคือที่  $\phi = 0^\circ$  หรือ  $90^\circ$

นอกจากนี้พึงสังเกตว่า ตัวแปรไอโซคลินิกนี้จะไม่ขึ้นอยู่กับขนาดของแรงที่กระทำต่อตัวแบบ ความยาวคลื่น (แสงเอกรงค์และ/หรือแสงพหุรงค์และ/หรือแสงสีขาว) หรือ ขนาดของตัวแบบ ลักษณะเช่นนี้จะทำให้รีวไอโซคลินิกเปลี่ยนตำแหน่งไปเมื่อแผ่นโพลาริซซ์หรือแผ่นวิเคราะห์หมุนไปเท่านั้น

สำหรับภาพรีวไอโซคลินิกที่แสดงนั้นได้มาจากการจำลอง (Simulation) ซึ่งจะกล่าวในรายละเอียดเชิงลึกในบทความภาคถัดๆ ไป อย่างไรก็ตาม ในส่วนของหลักการจำลองรีวเบื้องต้นนั้น ผู้อ่านสามารถค้นคว้ารายละเอียดเพิ่มเติมได้จากบทความของผู้เขียน [4], [5]

#### 4.3.2 ตัวแปร ไอโซโครมาติก: $\sin^2 \pi N = 0$

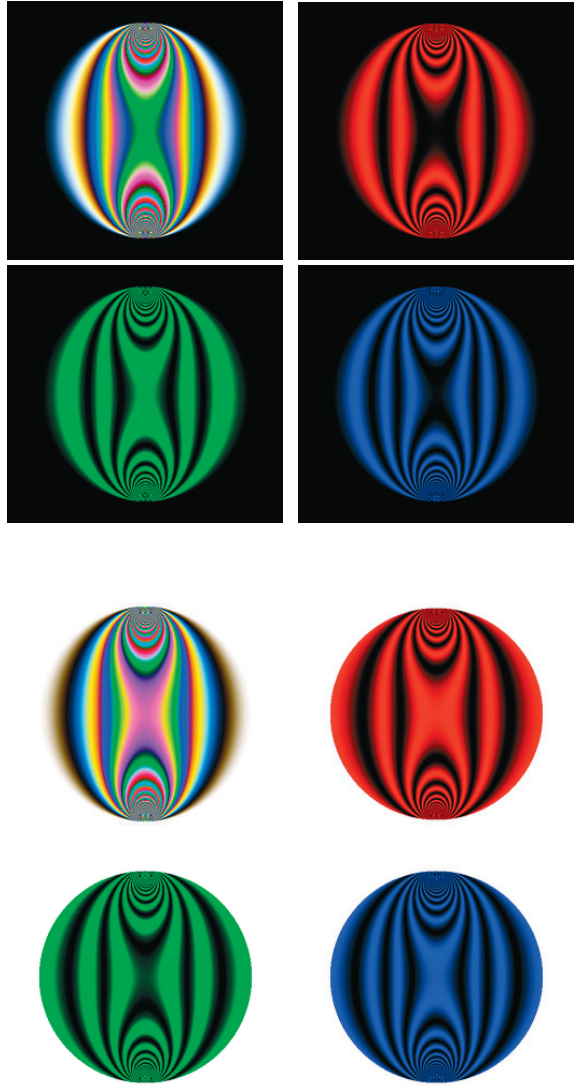
เงื่อนไขนี้จะเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อ  $\pi N = 0$  หรืออันดับรีว  $N = 0, 1, 2, \dots$  โดยที่จุดต่างๆ ในตัวแบบที่มีสภาวะผลต่างความเค้นหลัก ( $\sigma_1 - \sigma_2$ ) ที่ให้อันดับรีวมีค่าเป็นเลขจำนวนเต็มก็จะปรากฏเป็นสีดำ (ดูสมการ (2)) แต่เนื่องจากว่าความเค้นเป็นปริมาณที่มีความต่อเนื่อง

ดังนั้น สีดำ ณ จุดต่างๆ ที่กล่าวข้างต้นก็จะเรียงตัวกันเป็นริ้วที่มีชื่อว่า ริ้วไอโซโครมาติก (รูปที่ 6 สีภาพบน)

พิจารณาภาพไอโซโครมาติกแบบฉากหลังมีดรรชนีแสง สีเขียว และสีน้ำเงิน จะพบว่าตำแหน่งของริ้วสีดำนั้นจะไม่ซ้อนทับกัน โดยที่ภาพดรรชนีแสงจะมีจำนวนริ้วสีดำน้อยที่สุด ในขณะที่ภาพดรรชนีแสงมีจำนวนริ้วสีดำมากที่สุด

นอกจากนี้จะเห็นได้ว่า ณ จุด ด้านบนสุดและด้านล่างสุดของภาพริ้วไอโซโครมาติกซึ่งเป็นจุดที่มีแรงกดกระทำ ความถี่ของริ้วสีและริ้วสีดำจะมีค่าสูงมาก ซึ่งชี้ให้เห็นว่า ริ้วไอโซโครมาติกมีค่าขึ้นอยู่กับขนาดของแรงที่กระทำต่อตัวแบบ และจากที่กล่าวมาข้างต้นว่า ภาพดรรชนีแสงสามสีมีจำนวนริ้วสีดำที่ต่างกัน ดังนั้นจึงนำไปสู่ข้อสรุปที่ว่า ริ้วไอโซโครมาติกจะขึ้นอยู่กับความยาวคลื่นแสงของแหล่งกำเนิดแสงผ่านค่าสัมประสิทธิ์ริ้วความเค้นของวัสดุ  $f_{\sigma}(\lambda)$  ด้วยเช่นกัน (ดูสมการ (2))

สำหรับภาพไอโซโครมาติกแบบฉากหลังสว่างนั้น ก็จะมีลักษณะเช่นเดียวกับที่ได้อธิบายแล้ว อย่างไรก็ตามลักษณะของริ้วจะเปลี่ยนไป กล่าวคือความสว่างของสีในแต่ละระนาบจะสลับกัน หากพิจารณาสมการ (15) อีกครั้งโดยตัดผลของตัวแปรไอโซคลินิกออกก็จะทำให้สมการ (15) กลายเป็น  $I_p \cos^2 \pi N + I_b$  เงื่อนไขการเกิดริ้วสามารถแบ่งออกได้สองกรณีย่อย กล่าวคือกรณีที่อันดับริ้ว  $N = 0, 1, 2, \dots$  ริ้วก็จะเป็นสี (รูปที่ 6 สีภาพล่าง) หรือหากเปรียบเทียบระหว่างภาพลำดับแรกกับลำดับที่ห้าแล้ว ริ้วก็จะเปลี่ยนจากสีดำไปเป็นสีขาวนั่นเอง สำหรับกรณีที่สองนั้น หากพิจารณาให้  $I_p \cos^2 \pi N + I_b = 0$  ก็จะได้เห็นว่า  $N = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$  ซึ่งชี้ให้เห็นว่าอันดับริ้วไม่ใช่จำนวนเต็ม สิ่งที่เกิดขึ้นนี้ สามารถพิสูจน์ได้โดยการเปรียบเทียบตำแหน่งริ้วสีดำระหว่างภาพดรรชนีแสงทั้งสามของริ้วไอโซโครมาติกทั้งการจัดเรียงแบบฉากหลังมืดและฉากหลังสว่างตามลำดับ ซึ่งจะเห็นได้ว่า ริ้วสีดำจะมีตำแหน่งที่เยื้องกันเล็กน้อย สำหรับกรณีที่สองนี้จะไปสอดคล้องกับกรณีการใช้โพลาไรสโคปแบบใช้แสงโพลาไรซ์วงกลมซึ่งรายละเอียดจะได้นำเสนอในภาคต่อไป



รูปที่ 6 ริ้วไอโซโครมาติก (เรียงลำดับจากซ้ายไปขวา และบนลงล่าง) ที่เป็นไปตามเงื่อนไข  $\sin^2 \pi N = 0$  ตามการจัดเรียงแบบฉากหลังมืด (สีภาพบน) และการจัดเรียงแบบฉากหลังสว่าง (สีภาพล่าง) โดยภาพแรกและภาพลำดับที่ห้าเป็นภาพที่ได้จากการจำลองบนฐานแสงสีขาวหรือแสงพหุรงค์แดง เขียว และน้ำเงิน ซึ่งสามารถแยกดรรชนีออกมาได้สามสี ซึ่งก็คือสามภาพที่เหลือ ตามลำดับ

การรวมกันของภาพริ้วไอโซโครมาติกแบบฉากหลังมืดและสว่างนั้นจะช่วยเพิ่มความถูกต้องในการคำนวณหาค่าความเค้นมากยิ่งขึ้น ทั้งนี้เพราะความละเอียดของริ้วที่อ่านได้อยู่ในระดับ 0.5 ริ้ว อย่างไรก็ตาม หากต้องการความละเอียดมากยิ่งขึ้นก็สามารถทำได้โดยอาศัยวิธีการที่เรียกว่า ริ้วพหุคูณ (Fringe Multiplication) [2]

### 5. อิทธิพลของแหล่งกำเนิดแสง

จากสิ่งที่ได้อธิบายข้างต้น เราจะเห็นได้ว่าความยาวคลื่นแสงมีอิทธิพลต่อตัวแปรไอโซโครมาติก (ดูรูปที่ 6) ซึ่งริ้วจะมีลักษณะเปลี่ยนตำแหน่งไปเมื่อความยาวคลื่นมีค่าที่แตกต่างกันออกไป หากเราประยุกต์ใช้สมการ (10) และ/หรือสมการ (15) กับแหล่งกำเนิดแสงเอกรงค์ก็จะมีปัญหาใดๆ เกิดขึ้น ทั้งนี้เนื่องจากว่า การได้มาของสมการทั้งสองนั้นตั้งอยู่บนพื้นฐานของการใช้แหล่งกำเนิดแสงเอกรงค์ (สีแดงหรือสีอื่นใดก็ได้) อย่างไรก็ตาม หากแหล่งกำเนิดแสงที่ใช้เป็นแสงพหุรงค์หรือแสงสีขาว คำถามจึงมีอยู่ว่า เราจะยังคงใช้สมการความเข้มแสงควบคุมได้หรือไม่?

กรณีนี้ที่แหล่งกำเนิดแสงเป็นแสงสีขาวจะส่งผลให้สเปกตรัมแสงมีความกว้างมาก (ช่วงของแสงที่สามารถมองเห็นได้ด้วยตาเปล่า) ดังนั้น จึงจำเป็นต้องมีการปรับเปลี่ยนสมการ (10) และ (15) ใหม่อีกครั้งเพื่อให้ครอบคลุมช่วงความกว้างของสเปกตรัมแสงดังกล่าว ซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

$$I_d(\lambda) = \frac{\sin^2 2\phi}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} T(\lambda)F(\lambda)I_p(\lambda) \sin^2 \pi N(\lambda) d\lambda + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} T(\lambda)F(\lambda)I_b(\lambda) d\lambda \quad (16)$$

และ

$$I_l(\lambda) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} T(\lambda)F(\lambda)I_p(\lambda) d\lambda - \frac{\sin^2 2\phi}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} T(\lambda)F(\lambda)I_p(\lambda) \sin^2 \pi N(\lambda) d\lambda + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} T(\lambda)F(\lambda)I_b(\lambda) d\lambda \quad (17)$$

ตามลำดับ โดยที่  $T(\lambda)$  และ  $F(\lambda)$  แทนผลรวมของพฤติกรรมการส่งผ่านแสงของอุปกรณ์ทางแสงในโพลาไรสโคป และฟังก์ชันการตอบสนองเชิงสเปกตรัมแสงของแผ่นรับภาพ (Spectral Filters) ที่อยู่ในกล้องบันทึกภาพตามลำดับ  $(\lambda_2 - \lambda_1)$  แทนพจน์ปรับค่าเพื่อทำให้ค่าความเข้มแสงสุดท้ายมีค่าอยู่ระหว่าง 0 กับ 1 และความเข้มแสงฉากหลัง  $I_b$  แทนความเข้มแสงฉากหลังรวมตลอดความกว้างของสเปกตรัมแสง (ช่วง  $\lambda_1$  ถึง  $\lambda_2$ )

สำหรับกรณีที่ใช้แหล่งกำเนิดแสงที่เป็นแสงพหุรงค์ซึ่งเกิดจากรวมตัวกันของแสงเอกรงค์หลายๆ แสงนั้น เราก็สามารถปรับปรุงสมการ (16) และ (17) ได้ใหม่ ดังนี้ คือ

$$I_d(\lambda_i) = I_p(\lambda_i) \sin^2 \pi N(\lambda_i) \sin^2 2\phi + I_b(\lambda_i) \quad (18)$$

และ

$$I_l(\lambda_i) = I_p(\lambda_i)[1 - \sin^2 \pi N(\lambda_i) \sin^2 2\phi] + I_b(\lambda_i) \quad (19)$$

ตามลำดับ โดยที่ดัชนี  $i$  แทนหมายเลขลำดับของแสงเอกรงค์ที่ประกอบกันขึ้นเป็นแสงพหุรงค์

หากเราพิจารณาสมการ (18) และ (19) จะเห็นได้ว่าเครื่องหมายปริพันธ์ได้หายไป ทั้งนี้เนื่องจากว่า แสงเอกรงค์เดิมที่รวมตัวกันเป็นแสงพหุรงค์นั้น แต่ละแสงจะมีความกว้างของสเปกตรัมแสงน้อยมากๆ (เกือบเป็นความยาวคลื่นเดี่ยว) ดังนั้น จึงไม่จำเป็นต้องทำการปริพันธ์อีกต่อไป นอกจากนี้ ยังจะเห็นได้ว่าตัวแปรไอโซคลินิกจะอยู่นอกเครื่องหมายปริพันธ์หรือไม่มีสัญลักษณ์การขึ้นอยู่กับความยาวคลื่น  $\lambda_i$  ปรากฏอยู่ในทุกๆ สมการ ทั้งนี้เนื่องด้วยตัวแปรไอโซคลินิกไม่ขึ้นอยู่กับความยาวแสงดังที่ได้อธิบายมาแล้วข้างต้น

นอกจากนี้ในการคำนวณหาค่าตัวแปรไอโซคลินิกและไอโซโครมาติกนั้น นักวิจัยในสาขาโฟโตอ็อลาสติกซิตี มักจะกำหนดให้ความเข้มแสงฉากหลังมีค่าคงที่ในทุกๆ ความยาวคลื่นแสง ซึ่งจะเป็นผลให้ไม่ต้องทำการปริพันธ์พจน์ความเข้มแสงฉากหลัง [6]



## 6. สรุป

โฟโตอีลาสติคซิติ (แผนเดิม) เป็นวิธีการเชิงทดลองวิธีหนึ่งที่สามารถใช้วิเคราะห์หาค่าความเค้นในทางปฏิบัติได้อย่างมีประสิทธิภาพ การเกิดขึ้นใหม่ของสาขาโฟโตอีลาสติคซิติเชิงเลข ช่วยเพิ่มศักยภาพของวิธีการนี้ให้สามารถวิเคราะห์ความเค้นได้รวดเร็วและมีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น

บทความฉบับนี้ได้แสดงให้เห็นถึงวิธีการให้ได้มาซึ่งสมการความเข้มแสงควบคุมบนฐานตรีโกณมิติที่สอดคล้องกับโพลาไรสโคปแบบใช้แสงโพลาไรซ์ระนาบสมการความเข้มแสงควบคุมนี้ถือได้ว่าเป็นส่วนสำคัญอย่างยิ่งในการศึกษาทางด้านโฟโตอีลาสติคซิติเชิงเลข ทั้งนี้เพราะสามารถใช้อธิบายความหมายเชิงกายภาพของภาพสนามความเค้นที่มองเห็นได้ด้วยตาเปล่าหรือที่บันทึกได้ด้วยกล้องถ่ายภาพ

ในภาคถัดไปของบทความ ผู้เขียนจะแสดงให้เห็นถึงวิธีการได้มาของสมการความเข้มแสงควบคุมบนฐานตรีโกณมิติของโพลาไรสโคปแบบใช้แสงโพลาไรซ์วงกลมทั้งแบบธรรมดาและแบบผสม ซึ่งเป็นโพลาไรสโคปที่นิยมใช้ในการศึกษาทางด้านโฟโตอีลาสติคซิติเชิงเลข

## เอกสารอ้างอิง

[1] พิเชษฐ์ พิณีจ, “ความรู้ทั่วไปเกี่ยวกับโฟโตอีลาสติคซิติและโฟโตอีลาสติคซิติเชิงเลข,” *วิศวกรรมสาร มช.*, ปีที่ 36, ฉบับที่ 3, หน้า 193 – 200, 2552.

- [2] K. Ramesh, *Digital Photoelasticity: advanced techniques and applications*, Berlin: Springer, 2000.
- [3] I.A. Jones and P. Wang, “An Overdetermined Phase-stepping Strategy for the Capture of High-quality Photoelastic Data,” *Journal of Strain Analysis*, vol. 40, pp. 477-492, 2005.
- [4] พิเชษฐ์ พิณีจ, ณัฐวัฒน์ พลอยทับทิม และ ศรัณยู มั่นพิศุทธิ์, “การจำลองแบบริวสนามความเค้นเพื่อวิเคราะห์ความเค้นในช่วงยึดหยุ่นด้วยแสง,” ใน *การประชุมวิชาการทางวิศวกรรมศาสตร์มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ครั้งที่ 6, 8-9 พฤษภาคม 2551*, มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์, หาดใหญ่, หน้า 659-664, 2551.
- [5] ศรัณยู มั่นพิศุทธิ์ และ พิเชษฐ์ พิณีจ, “การจำลองสนามความเค้นของคานสี่เหลี่ยมอย่างง่ายรับแรงกระจายเอกรูปและแผ่นเรียบบางมีรูกลมตรงกลางรับความเค้นเฉือนล้วนด้วยโฟโตอีลาสติคซิติเชิงเลข,” ใน *การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 23, 4-7 พฤศจิกายน 2552*, โรงแรมอิมพีเรียลแม่ปิง, เชียงใหม่, รหัสบทความ AMM019109, 2552.
- [6] P. Pinit and E. Umezaki, “Digitally whole-field analysis of isoclinic parameter in photoelasticity by four-step color phase-shifting technique,” *Journal of Optics and Lasers in Engineering*, vol. 45, pp. 795-807, 2007.