

การค้นหาค่าที่ไร้ความต่อเนื่องในแผนภาพไอโซคลินิก ในวิธีวิเคราะห์ความเค้นในช่วงยืดหยุ่นด้วยแสงเชิงดิจิทัล

พิเชษฐ์ พินิจ¹

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี บางมด ทุ่งครุ กรุงเทพฯ 10140

รับเมื่อ 4 เมษายน 2551 ตอรับเมื่อ 9 มกราคม 2552

บทคัดย่อ

บทความฉบับนี้นำเสนอวิธีการค้นหาจุดที่ไร้ความต่อเนื่องในแผนภาพไอโซคลินิก ซึ่งวิธีการค้นหานั้นใช้แผนภาพ 3 แผนภาพคือ แผนภาพไอโซคลินิกในย่าน 0 ถึง $+\pi/2$ และย่าน $-\pi/4$ ถึง $+\pi/4$ และแผนภาพความเข้มแสงแปรเปลี่ยนผลจากการประยุกต์ใช้วิธีการกับภาพรีวิชันความเค้นของแผ่นจานกลมรับแรงเข้มกดสามแรงในแนวรัศมีและแผ่นวงแหวนปลายแยกรับแรงเข้มกดเยื้องที่ปลายโดยอาศัยหลักการเลื่อนเฟสพบว่า จุดที่ไร้ความต่อเนื่อง (จุดไอโซโทรปิก จุดเอกพจน์ และจุดซั่ว) สามารถถูกค้นพบได้โดยง่ายโดยอาศัยการอ่านกวาดควบคู่กับฟังก์ชันทวีและ/หรือฟังก์ชันไตร

คำสำคัญ : วิธีวิเคราะห์ความเค้นในช่วงยืดหยุ่นด้วยแสงเชิงดิจิทัล / ค่าที่ไร้ความต่อเนื่อง / ไอโซคลินิก

¹ อาจารย์ประจำ ภาควิชาครุศาสตร์เครื่องกล คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมและเทคโนโลยี

Detection of Discontinuity in Map of Isoclinics in Digital Photoelasticity

Pichet Pinit ¹

King Mongkut's University of Technology Thonburi, Bangmod, Toongkru, Bangkok 10140

Received 4 April 2008 ; accepted 9 January 2009

Abstract

This paper presents the automated method for detecting the discontinuity in map of isoclinics in digital photoelasticity. The method of detection involves the use of three phase maps, i.e., map of isoclinics in the range 0 to $+\pi/2$, map of isoclinics in the range $-\pi/4$ to $+\pi/4$, and map of modulated intensity. The result obtained from the application of the method to the fringe patterns of a circular disk under three-radial compressions and a split ring under eccentrically compression obtained on the basis of the phase-shifting technique shows that the positions of discontinuities (isotropic points, singular points, and poles) can be easily found with the use of the scanning process and the doublet and/or triplet functions.

Keywords : Digital Photoelasticity / Discontinuity / Isoclinics

¹ Lecturer, Mechanical Technology Education Department, Faculty of Industrial Education and Technology.

1. บทนำ

วิธีวิเคราะห์ความเค้นในช่วงยืดหยุ่นด้วยแสงเป็นหนึ่งในวิธีเชิงทดลองทางวิศวกรรมที่ใช้เพื่อวิเคราะห์ความเค้นที่เกิดในโครงสร้างหรือชิ้นส่วนของเครื่องจักรกล อย่างไรก็ตาม การวิเคราะห์ความเค้นนั้นค่อนข้างจะมีขั้นตอนซับซ้อนและต้องทำการวิเคราะห์ด้วยผู้เชี่ยวชาญเท่านั้น ปัจจุบันได้มีการพัฒนาวิธีการใหม่ซึ่งเรียกว่า วิธีวิเคราะห์ความเค้นในช่วงยืดหยุ่นด้วยแสงเชิงดิจิทัล (Digital photoelasticity) ซึ่งวิธีนี้เป็นการผสมผสานระหว่างวิธีวิเคราะห์ความเค้นในช่วงยืดหยุ่นด้วยแสงแผนเดิมกับวิธีการให้ได้มาซึ่งข้อมูล (Data acquisition) แนวใหม่ เช่น การใช้กล้องดิจิทัลเพื่อบันทึกภาพและการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์ เป็นต้น [1]

ในการวิเคราะห์ความเค้นด้วยวิธีวิเคราะห์ความเค้นในช่วงยืดหยุ่นด้วยแสงเชิงดิจิทัลนั้น จะมีริ้วเกิดขึ้นสองประเภทที่ใช้อธิบายลักษณะของความเค้น กล่าวคือ ริ้วไอโซโครมาติก (Isochromatic fringe) และ ริ้วไอโซคลินิก (Isoclinic fringe) โดยที่ริ้วทั้งสองนี้จะซ้อนทับ (Superposition) ซึ่งกันและกัน และเรียกว่า ริ้วสนามความเค้น ริ้วนี้จะถูกแสดงออกมาในรูปของภาพดิจิทัลที่บรรจุข้อมูลความเข้มแสงที่บันทึกได้ ริ้วสนามความเค้นนี้จะให้ทั้งขนาดและทิศทางของความเค้น สำหรับริ้วไอโซโครมาติกนั้นจะถูกใช้เพื่อการวิเคราะห์ค่าตัวแปรไอโซโครมาติก (Isochromatic parameter, δ) ซึ่งมีความสัมพันธ์โดยตรงกับสนามค่าความแตกต่างของความเค้นหลัก ($\sigma_1 - \sigma_2$) ในขณะที่ริ้วไอโซคลินิกจะถูกใช้เพื่อกำหนดค่าตัวแปรไอโซคลินิก (Isoclinic parameter, ϕ) ซึ่งมีความสัมพันธ์โดยตรงกับสนามทิศทางความเค้นหลัก

ตัวแปรไอโซโครมาติกจะมีความสัมพันธ์โดยตรงกับขนาดของแรงภายนอกที่กระทำต่อวัตถุหรือชิ้นส่วนที่พิจารณาซึ่งสามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้ [1]

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{Nh}{f_\sigma} \quad (1)$$

โดยที่ N คืออันดับริ้ว (Fringe order), h คือความหนาของชิ้นส่วนที่พิจารณาและ f_σ คือค่าสัมประสิทธิ์ริ้วความเค้นของวัสดุ (Material stress fringe value) สำหรับ

ตัวแปรไอโซคลินิกนั้นสามารถกำหนดค่าได้ทางทฤษฎีโดยใช้สมการ [2]

$$\tan 2\phi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \quad (2)$$

โดยที่ σ_{xx} , σ_{yy} และ τ_{xy} คือองค์ประกอบความเค้นในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนหรือระบบพิกัดฉาก

มีงานวิจัยหลายงานวิจัยที่ศึกษาเกี่ยวกับการประยุกต์ใช้วิธีวิเคราะห์ความเค้นในช่วงยืดหยุ่นด้วยแสง [3-7] และยังได้เสนอวิธีการต่างๆ เพื่อกำหนดหรือหาค่าตัวแปรทั้งสอง สำหรับตัวแปรไอโซคลินิกแล้วจะใช้วิธีเชิงเต็มสนาม (Whole field methods) และเทคนิคที่นิยมใช้กันก็คือเทคนิคการเลื่อนเฟส (Phase-shifting technique, PST) ด้วยเทคนิคการเลื่อนเฟสนี้จะมีปัญหาเกิดขึ้นสองปัญหาคือ อิทธิพลของตัวแปรไอโซโครมาติกต่อตัวแปรไอโซคลินิก (Isochromatic-isoclinic interaction) [1] และ เฟสซ้อนรูป (Wrapped phase) ปัญหาข้อแรกนั้นเกิดขึ้นเนื่องมาจากความผันผวนค่าของตัวแปรไอโซคลินิกเมื่อตัวแปรไอโซโครมาติกหรืออันดับริ้ว N มีค่าเข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนเต็มบวก ส่วนปัญหาข้อที่สองนั้นเกิดขึ้นเนื่องจากว่าย่านของตัวแปรไอโซคลินิกที่กว้างที่สุดที่สามารถคำนวณได้นั้น (แม้แต่ในทางทฤษฎีโดยการพิจารณาสมการที่ (2)) มีค่าอยู่ในช่วง $-\pi/4$ ถึง $+\pi/4$ ด้วยสัมประสิทธิ์ขนาด (Modulo) $\pi/2$ เท่านั้น ในขณะที่ย่านจริงหรือย่านกายภาพ (Physical range) จะมีค่าอยู่ในช่วง $-\pi/2$ ถึง $+\pi/2$

สำหรับปัญหาที่สองนั้นหากปล่อยไว้แล้วก็จะเกิดความสับสนในข้อที่ว่า แผนภาพไอโซคลินิกที่ได้นั้นแสดงหรือสอดคล้องกับสนามทิศทางของความเค้นหลักตัวใดระหว่าง σ_1 กับ σ_2 นอกจากนี้หากนำแผนภาพไอโซคลินิกในย่าน $-\pi/4$ ถึง $+\pi/4$ ไปคำนวณหาค่าตัวแปรไอโซโครมาติกแล้วก็จะเกิดการกลับหรือสลับของเครื่องหมายในแผนภาพไอโซโครมาติกตรงบริเวณที่เกิดการเปลี่ยนค่าตัวแปรไอโซคลินิกระหว่าง $-\pi/4$ ไปเป็น $+\pi/4$ หรือในทางกลับกัน ซึ่งในท้ายที่สุดก็จะมีผลต่อการกำหนดค่าตัวแปรไอโซโครมาติก เพื่อความสะดวกในการอ้างถึงย่านของค่าตัวแปรไอโซคลินิกต่อจากนี้ไปจะกำหนดให้ $[-\pi/4, +\pi/4]$ แทน $-\pi/4 < \phi \leq +\pi/4$ และสัญลักษณ์นี้

สามารถใช้ได้กับย่านอื่นๆ ที่จะได้กล่าวต่อไป

เพื่อให้ค่าตัวแปรไอโซคลินิกอยู่ในย่าน $[-\pi/4, +\pi/4]$ วิธีการคืนรูปเฟส (Phase unwrapping) จึงมีความจำเป็นอย่างยิ่ง ไม่นานมานี้ผู้วิจัยและผู้ร่วมวิจัยได้เสนอวิธีการคืนรูปสำหรับตัวแปรไอโซคลินิก [8] ซึ่งสามารถประยุกต์ใช้ได้ทั้งสนามไอโซคลินิกที่มีความต่อเนื่องและความไม่ต่อเนื่อง ในงานวิจัยนั้นส่วนสำคัญอันหนึ่งในกระบวนการการคืนรูปก็คือการกำหนดหาจุดหรือบริเวณที่ไร้ความต่อเนื่องโดยใช้แผนภาพไอโซคลินิกเพียงแผนภาพเดียวซึ่งทำให้แผนภาพไบนารี (Binary map) ที่ใช้แสดงตำแหน่งหรือบริเวณที่ไร้ความต่อเนื่องเกิดความผิดพลาด ผู้วิจัยได้นำเสนอวิธีการที่จะใช้ค้นหาจุดที่ไร้ความต่อเนื่องนี้โดยใช้แผนภาพไอโซคลินิกสองแผนภาพ [9] และให้ผลลัพธ์ที่ถูกต้องมากกว่าเมื่อเทียบการค้นหาที่ใช้แผนภาพเดียวสำหรับปัญหาแผ่นวงแหวนรับแรงข้มกดตรงกันข้ามผ่านแนวเส้นผ่านศูนย์กลาง (A circular ring under diametral compression)

ดังนั้นเพื่อเป็นการทดสอบและยืนยันศักยภาพของวิธีการที่ได้นำเสนอไปแล้วนั้น บทความนี้จึงนำเสนอการประยุกต์ใช้ของวิธีการกับปัญหาระนาบสองปัญหา กล่าวคือ แผ่นจานกลมรับแรงข้มกดสามแรงในแนวรัศมี (A circular disk under three-radial compressions) และแผ่นวงแหวนปลายแยกรับแรงข้มกดเอียงที่ปลาย (A split ring under eccentricity compression)

2. การกำหนดหาสนามตัวแปรไอโซคลินิก

2.1 หลักเกณฑ์เชิงทฤษฎี

จากสมการที่ (2) จะเห็นได้ว่า สามารถคำนวณหาตัวแปรไอโซคลินิกได้โดยการจัดสมการให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันแทนเจนต์ผกผัน กล่าวคือ

$$W[2\phi]_{\pi/2} = \tan^{-1} \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right) \quad (3)$$

โดยที่ $W[2\phi]_{\pi/2}$ คือตัวปฏิบัติการซ้อนเฟส (Wrapping operator) ที่สัมพันธ์ขนาด (Modulo) $\pi/2$ กล่าวคือฟังก์ชันแทนเจนต์ผกผันที่ใช้เป็นแบบสองจุดภาค (ให้ผลลัพธ์ในจุดภาคที่ 1 และ 4) นั่นก็หมายความว่า ค่าตัวแปรไอโซคลินิก ϕ จะมีค่าอยู่ในช่วง $(-\pi/4, +\pi/4]$ ดังนั้น

หากค่าของ ϕ มีค่าเท่ากับ $-\pi/4$ หรือ $+\pi/4$ แล้วก็จะเกิดลักษณะของเฟสพลิกกลับ (Phase flip) จากจุดนี้ก็จะเห็นได้ว่าแม้แต่ในทางทฤษฎีแผนภาพไอโซคลินิกที่ได้ก็ไม่สามารถแสดงค่าทิศทางของความเค้นหลักตัวใดตัวหนึ่งได้นอกจากจะใช้วิธีเสริมอื่นๆ ช่วย เช่น วงกลมโมห์หรือวิธีโอเก็น [1] ซึ่งก็จะมีคามยุ่งยากมากและไม่สามารถกระทำได้ในทางปฏิบัติ

2.2 หลักเกณฑ์เชิงทดลองโดยวิธีวิเคราะห์

ความเค้นในช่วงยึดหยุ่นด้วยแสง

สมการความเข้มแสง I ที่เคลื่อนที่ออกมาจากอุปกรณ์เบี่ยงเบนแสงระนาบแบบฉากหลังมืด (Dark-field plane polariscope) ที่ใช้แสงสีขาเป็นแหล่งกำเนิดแสง (รูปที่ 1) สามารถกำหนดเป็นสมการได้ดังนี้

$$I_{m,\lambda} = I_{\text{mod},\lambda} \sin^2 2(\phi - \theta) + I_{b,\lambda} \quad (4)$$

โดยที่

$$I_{\text{mod},\lambda} = \frac{1}{\Delta\lambda} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} I_{p,\lambda} \sin^2(\pi N) d\lambda \quad (5)$$

λ (=R, G, B) คือแสงองค์ประกอบมูลฐานของแสงสีขา, $\nabla\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ โดยที่ λ_2 และ λ_1 คือค่าขีดจำกัดบนและล่างของสเปกตรัมของแสงองค์ประกอบมูลฐาน, $I_{\text{mod},\lambda}$ คือค่าความเข้มแสงปรับเปลี่ยน (Modulated intensity), $I_{p,\lambda}$ คือค่าความเข้มแสงที่ออกมาจากแผ่นโพลาไรเซอร์, $N_\lambda (=d_\lambda/2\pi)$ คือค่าอันดับริ้วสัมผัส (Relative fringe order) และ $I_{b,\lambda}$ คือค่าความเข้มแสงฉากหลัง

ด้วยการประยุกต์ใช้วิธีการเลื่อนเฟสสี่ขั้น (Four-stepped phase shifting method) $m = 1, 2, 3, 4$ เข้ากับสมการที่ (4) ได้ว่า [8]

$$\phi_w = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \tan^{-1} \left(\frac{I_1^s - I_3^s}{I_2^s - I_4^s} \right) \quad \text{โดยที่ } I_{\text{mod}}^s \neq 0 \quad (6)$$

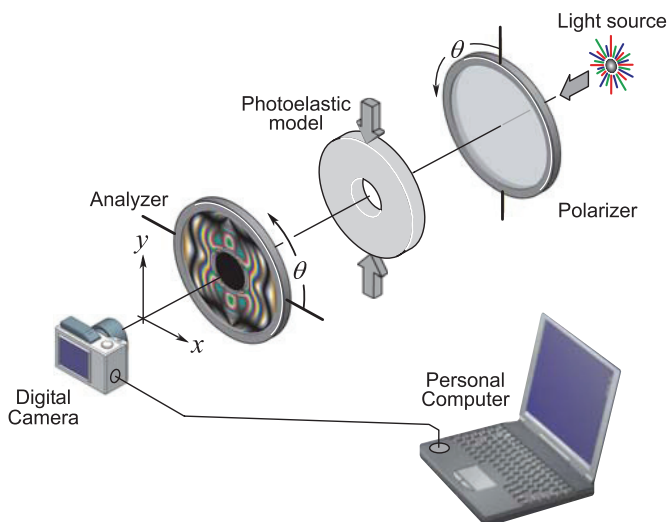
และ

$$I_m^s = I_{m,R} + I_{m,G} + I_{m,B} \quad (7)$$

$$I_{\text{mod}}^s = I_{\text{mod,R}} + I_{\text{mod,G}} + I_{\text{mod,B}}$$

$$= \sqrt{(I_1^s - I_3^s)^2 + (I_2^s - I_4^s)^2} \quad (8)$$

ตัวห้อย w ในสมการที่ (6) บ่งบอกให้ทราบว่าคุณค่าตัวแปรไอโซคลินิกที่คำนวณค่าได้นั้นเป็นค่าซ่อนรูป (Wrapped values) ที่อยู่ในช่วง $[0, +\pi/4]$



รูปที่ 1 อุปกรณ์เบี่ยงเบนแสงระนาบแบบฉากหลังมืด (แกนแสงของแผ่นโพลาไรเซอร์และอนาลิเซอร์ตั้งฉากซึ่งกันและกัน)

3. คำจำกัดความของภาวะไร้ความต่อเนื่อง

ภาวะไร้ความต่อเนื่องนั้นเป็นสมบัติประการหนึ่งของแผนภาพไอโซคลินิกและที่ตำแหน่งที่เกิดภาวะนี้ ภาวะของความเค้นจะสอดคล้องกับเงื่อนไขหนึ่งๆ หากพิจารณาสมการที่ (9) ร่วมกับสมการที่ (2) ก็จะช่วยทำให้ทราบถึงเงื่อนไขเหล่านั้น

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (9)$$

จากการพิจารณาสมการที่ (2) จะเห็นได้ว่ามี 3 กรณีที่เป็นปัจจัยก่อให้เกิดภาวะไร้ความต่อเนื่องในแผนภาพไอโซคลินิก

3.1 เงื่อนไข $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0 (=0)$ และ $\tau_{xy} = 0$

พิจารณาสมการที่ (9) จะเห็นได้ว่า เมื่อ $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} \neq 0 (=0)$ แล้ว $\sigma_1 = \sigma_2$ และ $(\sigma_1 - \sigma_2) = 0$ ดังนั้นจากสมการที่ (3) ตัวแปรไอโซคลินิกจะไม่สามารถหาค่าได้ (In-

determination) และจุดหรือบริเวณใดๆ ในตัวแบบที่สภาวะความเค้นสอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าวนี้ก็จะถูกเรียกว่า จุดไอโซโทรปิก (Isotropic point) [10] อย่างไรก็ตาม ความเป็นจริงแล้วที่ตำแหน่งที่เกิดภาวะไร้ความต่อเนื่องนั้นค่าตัวแปรไอโซคลินิก ϕ มีค่าได้ทุกๆ ค่าในย่านหนึ่งๆ สาเหตุที่เป็นเช่นนี้ก็เพราะว่าที่ภาวะความเค้นตามเงื่อนไขนี้จะปรากฏเป็นเพียงจุดบนแกน σ ในภาพวงกลมโมร์เท่านั้น

นอกจากนี้หากพิจารณาเงื่อนไขแล้วยังมีเงื่อนไขอีกข้อหนึ่งที่แสดงในวงเล็บ กล่าวคือ $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$ ที่จริงแล้วเงื่อนไขนี้เป็นเงื่อนไขพิเศษ (ดูหัวข้อที่ 3.2) อย่างไรก็ตามจะมีลักษณะของปัญหาบางปัญหาเช่น คานสี่เหลี่ยมรับภาระโมเมนต์ดัดล้วน (Pure bending beam) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขนี้ กล่าวคือที่บริเวณแกนสะเทิน (Neutral axis) ดังนั้นโดยสรุปแล้ว จุดหรือบริเวณใดๆ ในตัวแบบจะเป็นจุดไอโซโทรปิกก็ต่อเมื่อภาวะความเค้นสอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าวข้างต้นและต้องเป็นจุดหรือบริเวณที่อยู่ภายในตัวแบบเท่านั้น สำหรับจุดไอโซโทรปิกนี้

จะมีทั้งเครื่องหมายบวกและลบ กล่าวคือหากค่าของตัวแปรไอโซคลินิกมีค่าเพิ่มขึ้นในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาแล้วจุดนั้นก็จะมีเครื่องหมายบวก และในทางตรงกันข้ามหากค่าของตัวแปรไอโซคลินิกมีค่าเพิ่มขึ้นในทิศทางตามเข็มนาฬิกาแล้วจุดนั้นก็จะมีเครื่องหมายลบ

3.2 เงื่อนไข $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$ และ $\tau_{xy} = 0$

ตามที่ได้กล่าวในหัวข้อ 3.1 จุดหรือบริเวณใดๆ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขข้อนี้ก็จะถูกเรียกว่า จุดเอกพจน์ (Singular point) เงื่อนไขนี้เป็นเงื่อนไขหรือกรณีเฉพาะของเงื่อนไขในหัวข้อ 3.1 อย่างไรก็ตาม ความแตกต่างระหว่างเงื่อนไขนี้กับเงื่อนไขในวงเล็บตามที่ได้กล่าวมาแล้วก็คือว่า จุดเอกพจน์จะเป็นจุดที่อยู่ที่ขอบของตัวแบบที่ไม่มีความเค้นเฉือนกระทำ (Shear-free boundary) เท่านั้น [10] ทั้งนี้เนื่องมาจากว่า องค์ประกอบความเค้นในแนวที่ตั้งฉากกับขอบของตัวแบบนั้นมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นองค์ประกอบความเค้นที่เหลือที่มีทิศทางขนานกับขอบของตัวแบบก็จะต้องมีค่าเท่ากับศูนย์ด้วยเช่นกันและพึงสังเกตว่าจุดเอกพจน์จะมีเครื่องหมายลบเท่านั้น

3.3 เงื่อนไข $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \infty$ และ $\tau_{xy} = \infty$

เงื่อนไขนี้มักจะเกิดขึ้นที่บริเวณจุดที่แรงกระทำ (Load application points) ซึ่งบริเวณนี้ความเค้นจะมีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์ จุดนี้จะถูกเรียกว่า จุดขั้ว (Pole) [6] และด้วยเงื่อนไขนี้ $(\sigma_1 - \sigma_2) = \infty$ ซึ่งหากพิจารณาสมการที่ (1) แล้วก็จะเห็นว่า ค่าอันดับรีวี $N \rightarrow \infty$ และพึงสังเกตว่าจุดขั้วจะอยู่บนขอบเขตของตัวแบบเช่นกัน แต่จะมีเครื่องหมายบวก

4. ความเข้มแสงแปรเปลี่ยน $I_{\text{mod}, \lambda}$

จากสมการที่ (5) จะเห็นได้ว่า $I_{\text{mod}, \lambda}$ เป็นฟังก์ชันของรีวัตันต์ซึ่งสัมพันธ์โดยตรงกับ $(\sigma_1 - \sigma_2)$ (ดูสมการที่ (1) และ (5)) ดังนั้นที่จุดไอโซโทรปิกหรือจุดเอกพจน์ $I_{\text{mod}, \lambda} = 0$ ด้วยเหตุนี้ก็จะเกิดจุดมืดในรีวัตันต์ความเค้นและจุดมืดนี้จะสามารถแยกได้โดยง่ายหากรีวัตันต์ความเค้นนี้ถูกบันทึกโดยใช้แหล่งกำเนิดแสงสีขาว ดังนั้นแผนภาพความเข้มแสงแปรเปลี่ยนสามารถใช้ประกอบการค้นหาจุดหรือบริเวณที่ไร้ความต่อเนื่องได้

5. วิธีการค้นหาภาวะไร้ความต่อเนื่อง

5.1 การค้นหาจุดหรือบริเวณที่คาดว่าจะจะเป็นจุดหรือบริเวณที่ไร้ความต่อเนื่อง

การค้นหาที่กระทำได้โดยการอ่านกวาด (Scan) แผนภาพไอโซคลินิกในย่าน $[0, +\pi/2]$ และ $[-\pi/4, +\pi/4]$ ที่ละจุดภาพ (Pixel) โดยใช้หน้าต่าง (Mask window) $\Gamma_{w \times l}$ โดยที่ w คือความกว้างและ l คือความยาวของหน้าต่างเป็นจำนวนจุดภาพ นอกจากนี้ยังทำการอ่านกวาดแผนภาพความเข้มแสงแปรเปลี่ยนโดยใช้เงื่อนไข $T_{\text{mod}} I_{\text{mod}, \text{max}}$ โดยที่ T_{mod} คือค่าคงที่ใดๆ มีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 และ $I_{\text{mod}, \text{max}}$ คือค่าความเข้มแสงแปรเปลี่ยนสูงสุดในขณะทำการอ่านกวาดนั้นหากเงื่อนไขการกระจายตัวของตัวแปรไอโซคลินิก (จำนวนการพลิกกลับของเฟส) มีลักษณะสอดคล้องกับลักษณะการกระจายตัวมาตรฐาน [8,11] กล่าวคือมีการพลิกกลับของเฟสไปในทิศทางเดียวกันคือทวนเข็มนาฬิกา (เครื่องหมายบวก) หรือตามเข็มนาฬิกา (เครื่องหมายลบ) จุดภาพที่เป็นจุดกลางของหน้าต่างนั้นก็จะถูกเลือกให้เป็นจุดที่คาดว่าจะจะเป็นจุดที่ไร้ความต่อเนื่อง (Discontinuity-to-be pixel) นอกจากนี้สำหรับการอ่านกวาดแผนภาพความเข้มแสงแปรเปลี่ยนนั้น หากค่าความเข้มแสงแปรเปลี่ยนของจุดภาพใดๆ มีค่าน้อยกว่า $T_{\text{mod}} I_{\text{mod}, \text{max}}$ แล้ว จุดภาพนั้นก็จะถูกเลือกเช่นเดียวกัน ทั้งนี้จุดภาพทั้งหมดที่ถูกเลือกจะถูกบันทึกไว้ในบิตอาร์เรย์ 2 มิติจำนวน 3 อะเรย์ คือ $A_{[0,+\pi/2]}$, $A_{[-\pi/4,+\pi/4]}$ และ A_{mod} ตามลำดับที่สอดคล้องกับแผนภาพ พึงสังเกตว่าทั้ง 3 อะเรย์นี้จะถูกกำหนดค่าเริ่มให้มีค่าเท่ากับ 1 สำหรับทุกๆ จุดภาพในขอบเขตที่สนใจและสำหรับจุดภาพที่ถูกเลือกนั้นก็จะถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากับศูนย์

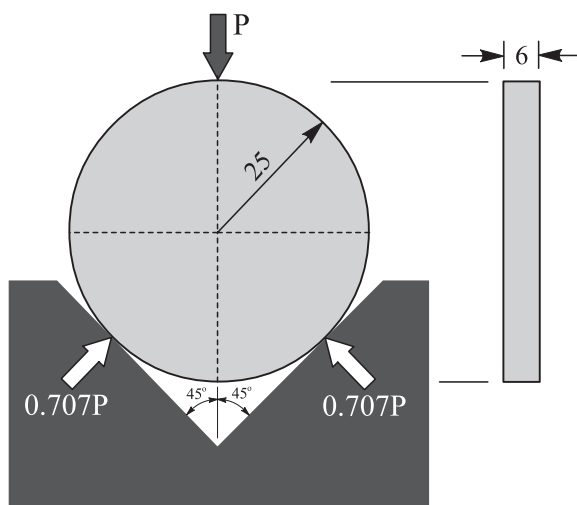
5.2 การกำหนดจุดหรือบริเวณที่ไร้ความต่อเนื่อง

ทำการเลือกจุดที่เป็นจุดที่ไร้ความต่อเนื่องจริงโดยกำหนดให้ α , β และ γ เป็นค่าจุดภาพในอะเรย์ทั้ง 3 ในหัวข้อที่ 5.1 ตามลำดับ จากนั้นสร้างอะเรย์สำหรับบันทึกผลลัพธ์ $A_{\text{discontinuity}}$ ที่มีขนาดเท่ากับอะเรย์ทั้ง 3 และกำหนดค่าเริ่มต้นให้มีค่าเท่ากับ 1 สำหรับการเลือกจุดภาพนั้นจะใช้ฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชัน คือ ฟังก์ชันทวี (Doublet function) และ ฟังก์ชันไตร (Triplet function)

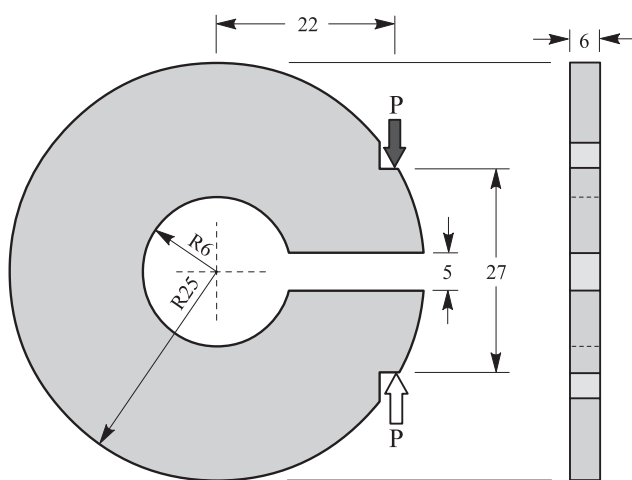
ขั้นตอนในการเลือกนั้นกระทำดังนี้สำหรับฟังก์ชัน ทวิ $D(\alpha, \beta)$ นั้นหากที่จุดภาพเดียวกัน $D(\alpha, \beta) = 0$ แล้ว จุดภาพนั้นจะถูกเลือกให้เป็นจุดที่ไร้ความต่อเนื่องและค่าของจุดภาพนี้ในอะเรีย $A_{\text{discontinuity}}$ จะถูกกำหนดให้เป็นศูนย์ ในส่วนของฟังก์ชันไตร $T(\alpha, \beta, \gamma)$ ก็มีลักษณะเช่นเดียวกันคือ หาก $T(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ แล้วจุดภาพนั้นก็จะถูกเลือกและค่าของจุดภาพนี้ในอะเรีย $A_{\text{discontinuity}}$ จะถูกกำหนดให้เป็นศูนย์

6. ผลลัพธ์และการวิจารณ์ผล

วิธีการที่ได้นำเสนอนี้จะประยุกต์ใช้กับตัวแบบ 2 แบบ คือ แผ่นจานกลมรับแรงเข้กดสามแรงในแนวรัศมี และ แผ่นวงแหวนปลายแยกรับแรงเข้กดคดเยื้องที่ปลาย ลักษณะทางกายภาพและการรับแรงของตัวแบบทั้งสองนั้นแสดงอยู่ในรูปที่ 2 โดยที่ตัวแบบทั้งสองทำมาจากแผ่นอีพ็อกซีเรซิน ผลลัพธ์ที่ได้จะถูกนำเสนอเป็นลำดับดังต่อไปนี้



(ก)



(ข)

รูปที่ 2 ตัวแบบที่ใช้ในการค้นหาจุดที่ไร้ความต่อเนื่อง (ก) แผ่นจานกลมรับแรงเข้กดสามแรงในแนวรัศมี

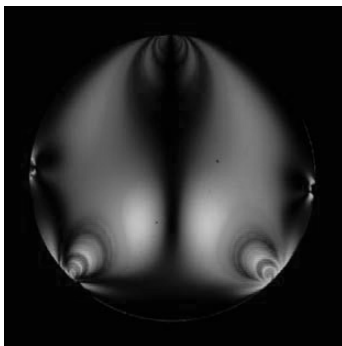
($P = 274$ นิวตัน) และ (ข) แผ่นวงแหวนปลายแยกรับแรงเข้กดคดเยื้องที่ปลาย ($P = 157$ นิวตัน)

(ลูกศรสีดำและสีขาวในภาพนั้นหมายถึงจุดที่แรงกระทำและจุดรองรับ
รูปภาพไม่ได้สัดส่วนและหน่วยทางด้านรูปร่างเป็นมิลลิเมตร)

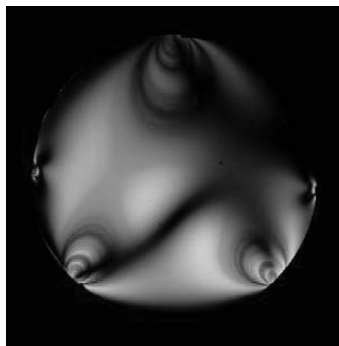
6.1 แผ่นจานกลมรับแรงเข้มนกดสามแรงในแนวรัศมี

รูปที่ 3 แสดงภาพริ้วสนามความเค้นที่ได้จากการบันทึกความเข้มแสงที่ออกมาจากอุปกรณ์เบี่ยงเบนแสงระนาบที่มุม θ ต่างๆ เมื่อ $P = 274$ นิวตัน (รูปที่ 1) รูปที่ 4 แสดงแผนภาพไอโซคลินิกที่ย่านต่างๆ และแผนภาพความเข้มแสงแปรเปลี่ยนที่คำนวณได้ [8] รูปที่ 4ก คือแผนภาพไอโซคลินิกที่ได้มาจากสมการที่ (6) ซึ่งมีค่าอยู่ในย่าน $[0, +\pi/4]$ ส่วนรูปที่ 4ข และ 4ค ซึ่งมีย่าน $[0, +\pi/2]$ และ $(-\pi/4, +\pi/4]$ ตามลำดับนั้น ได้มาจาก

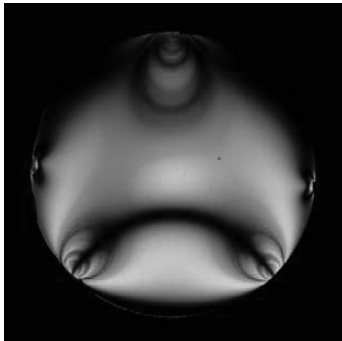
รูปที่ 4ก โดยการใช้อุปกรณ์การเปรียบเทียบค่าความเข้มแสงแตกต่างที่เป็นตัวแปรอิสระ (Argument) ของฟังก์ชันแทนเจนต์ผกผัน (พิจารณาสมการที่ (6)) [8] ในรูปที่ 4 นั้นสามารถเห็นลักษณะของการพลิกกลับของตัวแปรไอโซคลินิกได้อย่างชัดเจน (ขาวเป็นดำหรือในทางตรงกันข้าม) อย่างไรก็ตามแนวเส้นที่แสดงการพลิกกลับของตัวแปรไอโซคลินิกนั้นไม่ราบเรียบอย่างที่ควรจะเป็น สาเหตุที่เป็นเช่นนี้ก็เพราะอิทธิพลของตัวแปรไอโซโครมาติกหรืออันดับริ้วเมื่อมีค่าเป็นจำนวนเต็ม ($N = 0, 1, 2, \dots$)



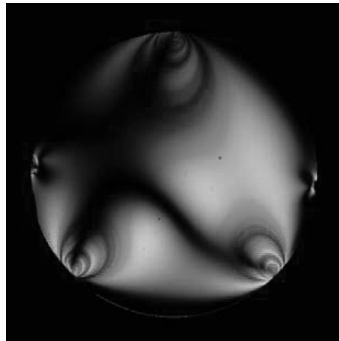
(ก)



(ข)



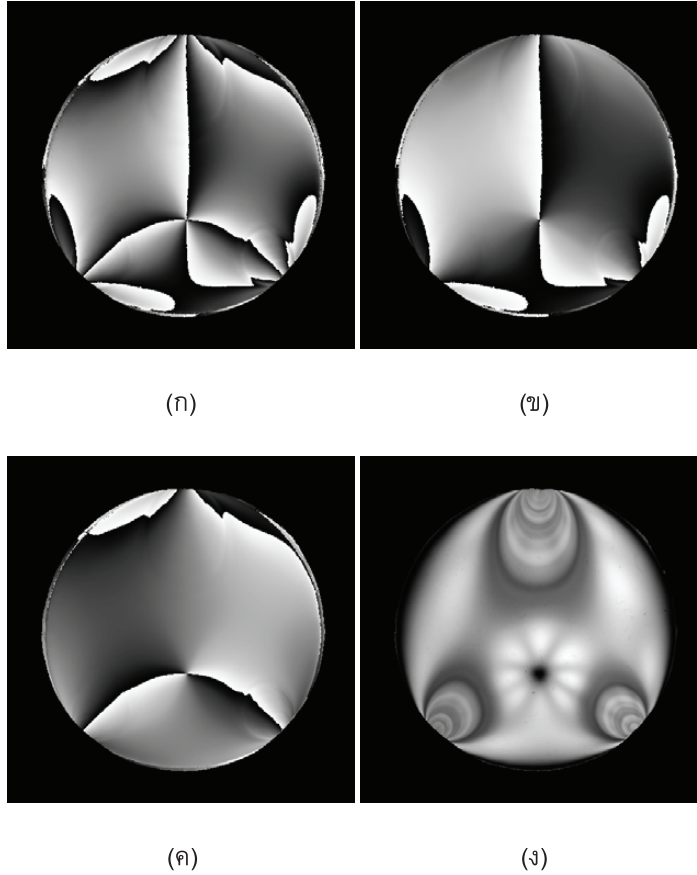
(ค)



(ง)

รูปที่ 3 ภาพสี 24 บิต ริ้วสนามความเค้นของแผ่นจานกลมรับแรงเข้มนกดสามแรงในแนวรัศมี

(ก) $\theta = 0$ (ข) $\theta = +\pi/8$ (ค) $\theta = +\pi/4$ และ (ง) $\theta = +3\pi/8$



รูปที่ 4 แผนภาพตัวแปรไอโซคลินิกที่ย่านต่างๆ และแผนภาพความเข้มแสงแปรเปลี่ยนผ่านจานกลม
รับแรงเข้มกดสามแรงในแนวรัศมี (ก) ϕ อยู่ในย่าน 0 ถึง $+\pi/4$ (ข) ϕ อยู่ในย่าน 0 ถึง $+\pi/2$
(ค) ϕ อยู่ในย่าน $-\pi/4$ ถึง $+\pi/4$ และ (ง) แผนภาพ I_{mod}

หลังจากประยุกต์วิธีการที่ได้นำเสนอไปแล้วในหัวข้อที่ (5) ก็จะได้แผนภาพที่แสดงตำแหน่งหรือจุดที่ไร้ความต่อเนื่อง รูปที่ 5 แสดงแผนภาพไบนารีที่แสดงตำแหน่งที่ไร้ความต่อเนื่องโดยที่ $\Gamma_{w \times 1} = \Gamma_{21 \times 21}$ และ $T_{\text{mod}} = 0.1$ รูปที่ 5ก ถึง 5ค ได้มาจากการอ่านกวาดอะเรย์ $A_{[0,+\pi/2]}$, $A_{[-\pi/4,+\pi/4]}$ และ A_{mod} ตามลำดับ พิจารณาทั้งสามภาพจะเห็นได้ว่าจุดไอโซโทรปิกจะอยู่ตรงกลางเยื้องลงทางด้านล่างเล็กน้อยโดยมีความสมมาตรทางด้านซ้ายและขวา นอกจากนี้จุดขั้วที่เป็นจุดที่แรงกระทำถูกค้นพบโดยวิธีการที่นำเสนอและเห็นได้อย่างชัดเจนในขณะที่จุดขั้วที่เป็นจุดรองรับไม่สามารถถูกค้นพบได้อย่างชัดเจนสาเหตุที่เป็นเช่นนี้อาจจะเนื่องมาจากว่าหน้าตาที่ใช้ในการค้นหานั้นเป็นหน้าตาที่เปลี่ยนจตุรัส หากจุดภาพที่

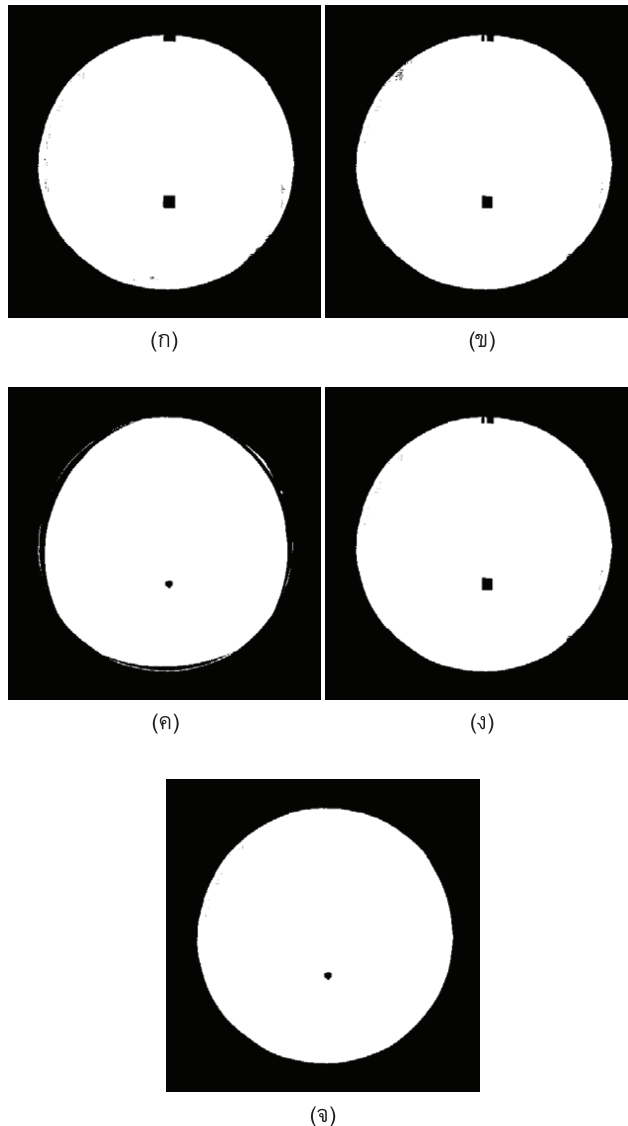
พิจารณาอยู่เป็นจุดภาพที่อยู่บนขอบในแนวเส้นทแยงมุมแล้วอาจจะทำให้กระบวนการเลือกเกิดความผิดพลาดได้

สำหรับจุดที่อยู่บนขอบเขตของตัวแบบทุกๆ จุดนั้นจะเป็นจุดเอกพจน์ (ยกเว้นจุดขั้ว) อย่างไรก็ตาม จุดเอกพจน์เหล่านี้ไม่สามารถถูกค้นพบได้ด้วยการอ่านกวาดอะเรย์ $A_{[0,+\pi/2]}$ และ $A_{[-\pi/4,+\pi/4]}$ เนื่องจากการอ่านกวาดแบบใช้หน้าตานั้นจะต้องทำการเปรียบเทียบลักษณะการพลิกกลับของตัวแปรไอโซคลินิกเป็นหลัก หากสังเกตตามขอบของรูปที่ 5ค แล้วยังจะพบว่าจุดเอกพจน์ถูกค้นพบด้วยการอ่านกวาด A_{mod} และจุดที่เป็นจุดเอกพจน์ทั้งหมดที่ถูกเลือกจะเป็นไปตามเงื่อนไข $I_{\text{mod}} < T_{\text{mod}} I_{\text{mod, max}}$ อย่างไรก็ตาม จะเห็นได้ว่ายังมีจุดบางจุดที่ไม่ถูกเลือกให้เป็นจุดเอกพจน์ (กลุ่มของจุดภาพสีขาวที่ยังเหลืออยู่ตามขอบ) ทั้งนี้เนื่อง

มากกว่า ในการทำตัวแบบนั้นย่อมมีความเค้นตึงค้ำที่ขอบซึ่งความเค้นตึงค้ำเป็นตัวผลักดันให้จุดเอกพจน์จริงเลื่อนที่เข้าไปด้านในตัวแบบ

รูปที่ 5ง และ 5จ แสดงแผนภาพที่ได้จากการประยุกต์ใช้ฟังก์ชันทวีและฟังก์ชันไตรตามลำดับ พิจารณาผลที่ได้รับจากฟังก์ชันทวีแล้วจะเห็นว่าจุดหรือบริเวณต่างๆ ที่ได้ถูกเลือกไว้ในครั้งแรกได้ถูกลบออกไป กล่าวคือถูก

กำหนดค่ากลับไปเป็น 1 ซึ่งทำให้มีความถูกต้องมากขึ้น อย่างไรก็ตามหากพิจารณาผลที่ได้จากฟังก์ชันไตรแล้ว จุดเอกพจน์ได้ถูกลบออกไปเกือบหมดคงเหลือไว้แต่เพียงจุดไอโซโทรปิกภายในตัวแบบเท่านั้น ซึ่งตำแหน่งของจุดไอโซโทรปิกนี้มีความถูกต้องซึ่งสามารถยืนยันได้จากการพิจารณาค่าแห่งของจุดมืดในรูปที่ 4ง

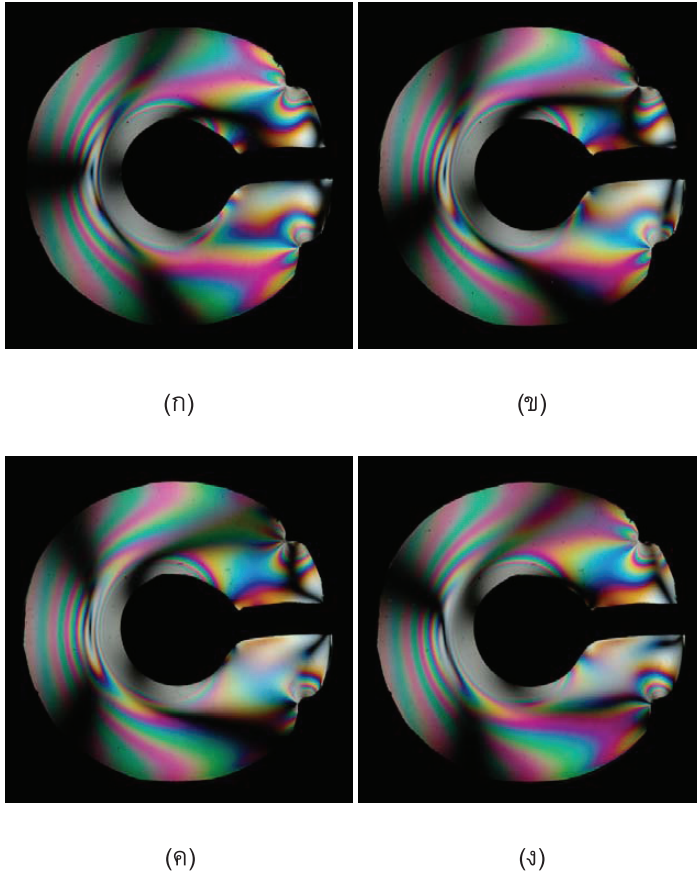


รูปที่ 5 แผนภาพโบนารีแสดงตำแหน่งของจุดที่ไร้ความต่อเนื่องของแผ่นจานกลมรับแรงเข้มกดสามแรง ในแนวรัศมีที่ได้จากการอ่านกวาด (ก) $A_{[0,+\pi/2]}$ (ข) $A_{[-\pi/4,+\pi/4]}$ (ค) A_{mod} (ง) $A_{\text{discontinuity}}$ จากฟังก์ชันทวี $D(\alpha, \beta)$ และ (จ) $A_{\text{discontinuity}}$ จากฟังก์ชันไตร $T(\alpha, \beta, \gamma)$

6.2 แผ่นวงแหวนปลายแยกรับแรงเข้มกดเอียงที่ปลาย

รูปที่ 6 แสดงภาพริ้วสนามความเค้นที่ได้จากการบันทึกความเข้มแสงที่ออกมาจากอุปกรณ์เบี่ยงเบนแสงระนาบที่มุม θ ต่างๆ เมื่อ $P = 157$ นิวตัน รูปที่ 7 แสดงแผนภาพไอโซคลินิกที่ย่านต่างๆ และแผนภาพ

ความเข้มแสงแปรเปลี่ยนที่คำนวณได้ [8] ในรูปที่ 6 นั้น จะเห็นได้ว่าริ้วไอโซคลินิก (ริ้วมืด) จะมีลักษณะไม่สมมาตรอย่างที่ควรจะเป็น ทั้งนี้เพราะความไม่สมบูรณ์ทางด้านรูปร่างของตัวแบบและแนวของแรงที่กระทำไม่ผ่านจุดรองรับในแนวเส้นตรงตั้ง



รูปที่ 6 ภาพสี 24 บิต ริ้วสนามความเค้นของแผ่นวงแหวนปลายแยกรับแรงเข้มกดเอียงที่ปลาย

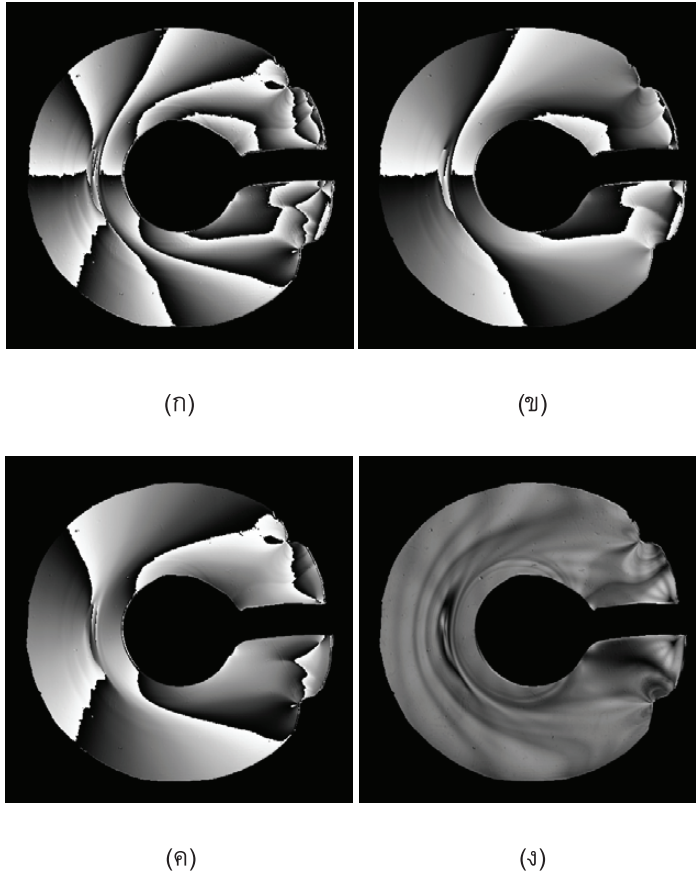
(ก) $\theta = 0$ (ข) $\theta = +\pi/8$ (ค) $\theta = +\pi/4$ และ (ง) $\theta = +3\pi/8$

รูปที่ 7ก ถึง 7ค คือแผนภาพไอโซคลินิกในย่าน $[0, +\pi/4]$, $[0, +\pi/2]$, $(-\pi/4, +\pi/4]$ และ รูปที่ 7ง คือแผนภาพความเข้มแสง I_{mod} ในรูปที่ 7ก ถึง 7ค นั้นสามารถเห็นลักษณะของการพลิกกลับของตัวแปรไอโซคลินิกได้อย่างชัดเจนเช่นเดียวกับรูปที่ 4ก ถึง 4ค ด้วย $\Gamma_{w \times 1} = \Gamma_{21 \times 21}$ และ $T_{\text{mod}} = 0.1$ รูปที่ 8ก ถึง 8ค แสดง

แผนภาพโบนารีที่ได้มาจากการอ่านกวาดอะเรีย $A_{[0, +\pi/2]}$, $A_{[-\pi/4, +\pi/4]}$ และ A_{mod} ตามลำดับ พิจารณาทั้งสามภาพจะเห็นได้ว่าตำแหน่งที่เป็นจุดไอโซโทรปิกนั้นจะมีบริเวณกว้าง กล่าวคือ เป็นบริเวณไอโซโทรปิก นอกจากนี้จุดขั้วทั้งสองจุดก็ถูกค้นพบเช่นเดียวกัน พึงสังเกตุว่าปัญหานี้จุดเอกพจน์ตามขอบราบเรียบจะไม่มีเนื่องจากว่า ค่าอันดับริ้ว

$N > 0$ และส่วนนี้สามารถยืนยันได้จากการพิจารณารูปที่ 8ค อย่างไรก็ตามหากพิจารณารูปที่ 7ง กับ รูปที่ 8ก ถึง 8ค พบว่า ที่ปลายคมทางด้านขวามีจุดมืด 2 จุด จากคำนิยามตามหัวข้อที่ 3 แล้ว จุดทั้งสองนี้ต้องเป็นจุดไอโซโทรปิก แต่ความเป็นจริงแล้วจุดทั้งสองเป็นจุดเอกพจน์ที่อยู่ที่ขอบตัดคมสาเหตุที่จุดทั้งสองเลื่อนเข้ามาอยู่ด้านในก็เนื่องมาจาก

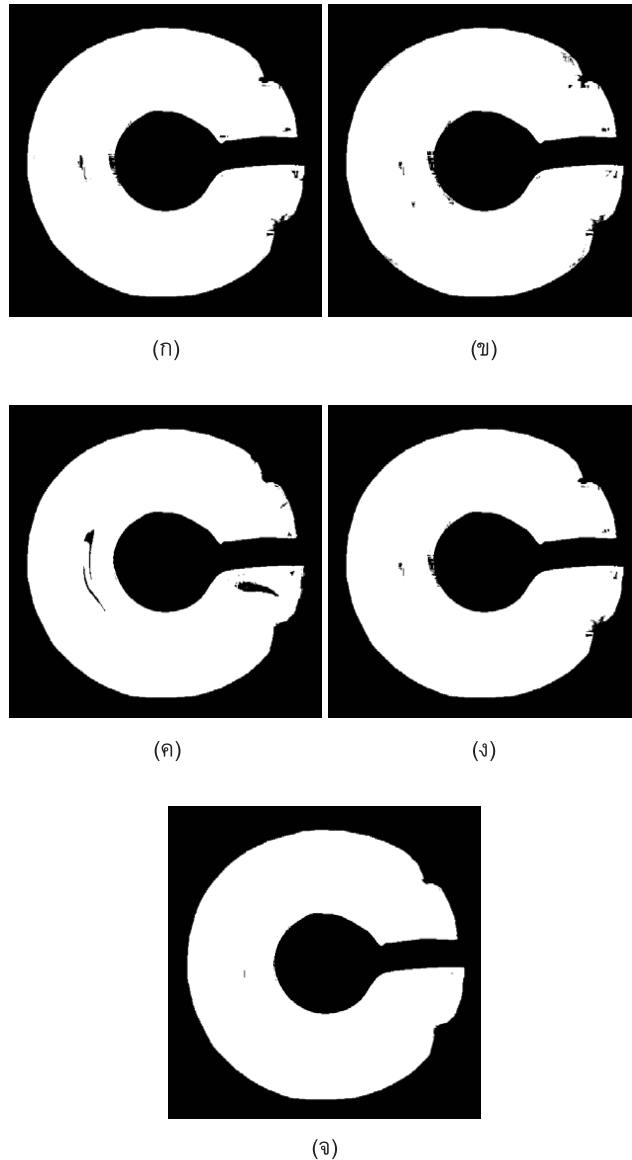
ความไม่สมบูรณ์ทางด้านรูปร่างดังที่ได้กล่าวแล้วข้างต้น นอกจากนี้ในรูปที่ 8ค จะเห็นว่าไม่มีบริเวณที่เป็นสีดำทางด้านขวามือ บริเวณนี้โดยความเป็นจริงแล้วไม่ใช่บริเวณไอโซโทรปิกและการที่บริเวณนี้ถูกค้นพบนั้นก็เนื่องมาจากว่า $I_{\text{mod}}^{\circ} < T_{\text{mod}} I_{\text{mod, max}}^{\circ}$ รูปที่ 8ก และ 8ข ยืนยันความจริงข้อนี้เพราะไม่มีบริเวณดังกล่าวในรูปทั้งสอง



รูปที่ 7 แผนภาพตัวแปรไอโซคลินิกที่ย่านต่างๆ และแผนภาพความเข้มแสงแปรเปลี่ยนของแผ่นวงแหวน
 ปลายแยกรับแรงเข้มกตเยื้องที่ปลาย (ก) ϕ อยู่ในย่าน 0 ถึง $+\pi/4$ (ข) ϕ อยู่ในย่าน 0 ถึง $+\pi/2$
 (ค) ϕ อยู่ในย่าน $-\pi/4$ ถึง $+\pi/4$ และ (ง) แผนภาพ I_{mod}°

รูปที่ 8ง และ 8จ แสดงแผนภาพที่ได้จากการประยุกต์ใช้ฟังก์ชันทวีและฟังก์ชันไตร พิจารณาผลที่ได้รับจากฟังก์ชันทวีแล้วจะเห็นว่าจุดหรือบริเวณต่างๆ ได้ถูกลบออกไปคงเหลือไว้แต่จุดไอโซโทรปิกและจุดซั้วซึ่งสามารถเห็นได้อย่างชัดเจน สำหรับผลที่ได้จากฟังก์ชันไตร

จุดซั้วได้ถูกลบออกไปคงเหลือไว้แต่เพียงจุดไอโซโทรปิกภายในตัวแบบ อย่างไรก็ตามจุดไอโซโทรปิกมีขนาดเล็กเกินไปซึ่งไม่สอดคล้องกับบริเวณมิดในรูปที่ 7ง แต่ทั้งนี้รูปร่างของบริเวณไอโซโทรปิกที่ปรากฏอยู่ในรูปที่ 8ค นั้นมีความสอดคล้องกับบริเวณมิดในรูปที่ 7ง



รูปที่ 8 แผนภาพไบนารีแสดงตำแหน่งของจุดที่ไร้ความต่อเนื่องของแผ่นจานกลมรับแรงเข้มกดสามแรง ในแนวรัศมีที่ได้จากการอ่านกวาด (ก) $A_{[0,+\pi/2]}$ (ข) $A_{[-\pi/4,+\pi/4]}$ (ค) A_{mod} (ง) $A_{\text{discontinuity}}$ จากฟังก์ชันทวี $D(\alpha, \beta)$ และ (จ) $A_{\text{discontinuity}}$ จากฟังก์ชันไตร $T(\alpha, \beta, \gamma)$

7. สรุป

ในบทความวิจัยฉบับนี้ การเกิดขึ้นของภาวะไร้ความต่อเนื่องในแผนภาพไอโซคลินิกและวิธีการค้นหาตำแหน่งของภาวะไร้ความต่อเนื่องนั้นได้ถูกนำเสนอ จากการประยุกต์ใช้แผนภาพไอโซคลินิกและแผนภาพความเข้มแสงแปรเปลี่ยนพร้อมกับวิธีการที่กล่าวข้างต้น ทำให้ทราบตำแหน่งของภาวะไร้ความต่อเนื่องทั้งจุดไอโซโทรปิก จุดเอกพจน์ และจุดซั่ว โดยเฉพาะจุดไอโซโทรปิกนั้นสามารถถูกค้นพบได้อย่างชัดเจนด้วยฟังก์ชันไตร อย่างไรก็ตามยังมีจุดบางจุดที่ถูกกำหนดให้เป็นจุดที่ไร้ความต่อเนื่องต่างๆ ที่จุดเหล่านั้นไม่ได้เป็นจุดที่ไร้ความต่อเนื่อง ดังนั้นการปรับปรุงรูปแบบของหน้าต่างในการอ่านกวาดจากสี่เหลี่ยมเป็นวงกลมอาจจะทำให้การได้มาซึ่งตำแหน่งที่ไร้ความต่อเนื่องนั้นมีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น

การกำหนดหาตำแหน่งของจุดที่ไร้ความต่อเนื่องนี้สามารถกระทำได้โดยอาศัยการผสมผสานระหว่างวิธีการเชิงตัวเลข เช่น วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธีวิเคราะห์ความเค้นในช่วงยึดหยุ่นด้วยแสงเชิงดิจิตอล [11,12] ผลจากการใช้วิธีผสมผสานชี้ให้เห็นว่าการกำหนดตำแหน่งจุดที่ไร้ความต่อเนื่องมีความผิดพลาดน้อยกว่าร้อยละ 5 เมื่อเทียบกับวิธีวิเคราะห์ความเค้นในช่วงยึดหยุ่นด้วยแสงเชิงดิจิตอล [13] หากพิจารณาเทียบเคียงวิธีการที่ได้นำเสนอ กับวิธีวิเคราะห์ความเค้นในช่วงยึดหยุ่นด้วยแสงเชิงดิจิตอลแล้วจะเห็นได้ว่าวิธีการที่ได้นำเสนอนี้มีความสะดวกมากกว่า ทั้งนี้ก็เนื่องจากว่าวิธีการที่ได้นำเสนอกำหนดหาจุดที่ไร้ความต่อเนื่องโดยอาศัยเพียงแผนภาพไอโซคลินิกและแผนภาพความเข้มแสงแปรเปลี่ยนเท่านั้น ในขณะที่วิธีวิเคราะห์ความเค้นในช่วงยึดหยุ่นด้วยแสงเชิงดิจิตอล [13] นั้นต้องอาศัยแผนภาพวิถีความเค้น (Stress trajectories) ซึ่งวิธีการกำหนดหาแผนภาพวิถีความเค้นนี้มีความยากยิ่งกว่าการกำหนดหาแผนภาพไอโซคลินิก ดังนั้นหากนำวิธีการที่ได้นำเสนอนี้ไปผนวกกับวิธีการในเอกสารอ้างอิงหมายเลข [12] ก็จะทำให้เพิ่มขีดความสามารถในการกำหนดหาจุดที่ไร้ความต่อเนื่องได้ในแง่ของช่วงเวลาในการกำหนดหาและค่าตำแหน่งที่ถูกต้อง

8. เอกสารอ้างอิง

1. Ramesh, K., 2000, *Digital Photoelasticity: Advanced Techniques and Applications*, Springer, Germany.
2. Hibbeler, R.C., 2003, *Mechanics of Materials*, Prentice Hall, Singapore.
3. วิโรจน์ ลิมตระการ, 2547, “การประเมินระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธีไฟโตอีลาสติซิตีสำหรับงานด้านกลศาสตร์ของแข็ง”, *การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 18*, CST25.
4. Limtrakarn, W., Dechapanichkul, B., Olarnrithinun, S., and Jirathearant, S., 2005, “Case Study of Finite Element Method and Photoelasticity for Contact Mechanics Problems”, *Proceedings of the 19th Conference of Mechanical Engineering Network of Thailand*, on CD-Rom, AMM081.
5. วิโรจน์ ลิมตระการ, 2548, “การเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ความเค้นของปัญหากลศาสตร์ของแข็งใน 2 มิติ ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธีไฟโตอีลาสติซิตี”, *วารสารวิจัยและพัฒนา มจร.*, ปีที่ 28, ฉบับที่ 1, หน้า 75-86.
6. Zhenkun, L., Dazhen, Y., and Wanming, Y., 2003, “Whole-field determination of isoclinic parameter by five-step color phase shifting and its error analysis”, *Optics and Lasers in Engineering*, Vol. 40, No. 3, pp. 189-200.
7. Ajovalasit, A., Petrucci, G., and Scafidi, M., 2007, “Phase shifting photoelasticity in white light”, *Optics and Lasers in Engineering*, Vol. 45, No. 5, pp. 596-611.
8. Pinit, P. and Umezaki, E., 2007, “Digitally whole-field analysis of isoclinic parameter in photoelasticity by four-step color phase-shifting technique”, *Optics and Lasers in Engineering*, Vol. 45 No. 7, pp. 795-807.

9. Pinit, P., 2007, "Automated Detection of Singularities from Orientation Map of Isoclinics in Digital Photoelasticity", *Proceedings of the 21st Conference of Mechanical Engineering Network of Thailand*, on CD-Rom, AMM11.
10. Frocht, M.M., 1948, Photoelasticity, Vol. 1, *John Willey & Sons*, New York.
11. Umezaki, E., Waranabe, H., Sirichai, S. and Shimamoto, A., 1994, "Extraction of singular points from photoelastic measurement", *Recent Advances in Experimental Mechanics* (Gomes, S., et al., eds.), Rotterdam, Netherlands, pp. 107-112.
12. Umezaki, E. and Terauchi, S., 2002, "Extraction of isotropic points using simulated isoclinics obtained by photoelasticity-assisted finite element analysis", *Optics and Lasers in Engineering*, Vol. 38, No. 1-2, pp. 71-85.
13. Umezaki, E. and Kawakami, T., 1998, "Extraction of zero points using photoelasticity-assisted FEA". In: I.M. Allison, Editor, *Experimental Mechanics*, Balkema, Rotterdam, pp. 553-558.