

## การจำลองแบบริ้วสนามความเค้นเพื่อวิเคราะห์ความเค้นในช่วงยึดหยุ่นด้วยแสง

### A Simulation of Fringe Pattern of Stress Field for Photoelasticity

พิเชษฐ์ พินิจ\* ณัฐวัฒน์ พลอยทับทิม ศรีณยู มั่นพิศุทธิ์  
ภาควิชาครุศาสตร์เครื่องกล คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมและเทคโนโลยี  
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี เขตทุ่งครุ กรุงเทพฯ 10140  
\*E-mail: ipichet@yahoo.com

Pichet Pinit\* Nuttawat Ploytabtim Sarayu Mumpisit  
Department of Mechanical Technology Education, Faculty of Industrial Education and Technology  
King Mongkut's University of Technology Thonburi, Thungkru Bangkok, 10140  
\*E-mail: ipichet@yahoo.com

#### บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการจำลองรูปแบบริ้วสนามความเค้นของคานสี่เหลี่ยม มีจุดรองรับอย่างง่าย อยู่ภายใต้แรงกระทำเฉพาะจุดที่กึ่งกลาง คาน เพื่อ การ ยก ระดับ เป็น ปัญหา เทียบเคียง มาตราฐาน ปัญหาเทียบเคียงเดิมนั้นเป็นปัญหาแผ่นวงกลมรับแรงกดในแนวตั้ง ผ่านเส้นผ่านศูนย์กลางซึ่งลักษณะของรูปแบบริ้วที่เกิดขึ้นมีข้อมูลไม่เพียงพอต่อการวิเคราะห์ความเค้นเนื่องจากรูปแบบริ้วนั้นไม่มีจุดเอกพจน์หรือจุดไอโซโครมิก โดยที่จุดเหล่านี้เป็นปัจจัยสำคัญที่ทำให้การวิเคราะห์ความเค้นเกิดความผิดพลาดและล้มเหลวด้วยการประยุกต์ใช้สมการองค์ประกอบความเค้นซึ่งกำหนดหาได้จากทฤษฎีการยึดหยุ่นกับสมการความเข้มแสงทางวิธีวิเคราะห์ความเค้นในช่วงยึดหยุ่นด้วยแสงก็สามารถจำลองรูปแบบริ้วได้จากผลลัพธ์พบว่าภาพที่ได้จากการจำลองแบบมีความใกล้เคียงกับภาพที่ได้จากการทดลองและในเบื้องต้นสามารถนำไปใช้กำหนดหาทิศทางของความเค้นและเป็นปัญหาเทียบเคียงได้

**คำหลัก** วิธีวิเคราะห์ความเค้นในช่วงยึดหยุ่นด้วยแสง, การจำลองแบบ, สนามความเค้น, ทิศทางของความเค้นหลัก

#### Abstract

This paper is to present a simulation of the fringe pattern of stress field of rectangular beam subjected to the concentrated force at its center. The fringe field of the beam is further used as a new benchmark problem substituting the conventional one which is the circular disk under vertically diametral compression. The requirement of a new benchmark is due to the fact that the fringe field of the circular disk lacks several important aspects such as isotropic point and singular point. For simulation, a dark-field plane polariscope is used with the three primary wavelengths of the white light. With the

equations of the Cartesian stress components derived from the theory of elasticity and the light intensity equation in photoelasticity, the fringe field of the beam can be successfully simulated. The simulated fringes show good agreement with the experimentally obtained fringe pattern and provide reliable isoclinic unwrapped map. The fringe field of beam can, then, be used as a new benchmark problem in photoelasticity.

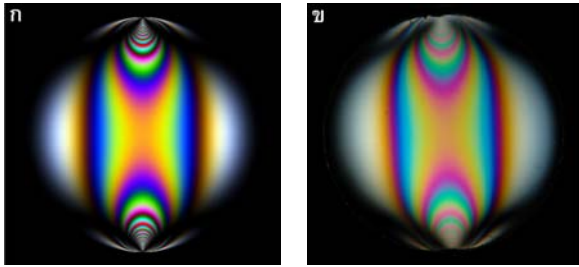
**Keywords:** Photoelasticity, Simulation, Fringe pattern, Directions of principal Stresses

#### 1. บทนำ

วิธีวิเคราะห์ความเค้นในช่วงยึดหยุ่นด้วยแสง เป็นหนึ่งในวิธีเชิงทดลองทางวิศวกรรมที่ใช้วิเคราะห์หาลักษณะการกระจายตัวของความเค้นในชิ้นส่วนของโครงสร้างหรือเครื่องจักรกลที่อยู่ภายใต้ภาระหรือแรงกระทำ ในการวิเคราะห์ความเค้นด้วยวิธีนี้นั้นจะมีตัวแปรอยู่สองตัวแปรที่ใช้อธิบายลักษณะของความเค้น กล่าวคือ ตัวแปรไอโซคลินิก (isoclinic parameter,  $\phi$ ) และตัวแปรไอโซโครมาติก (isochromatic parameter,  $\delta$ ) ตัวแปรไอโซคลินิกจะใช้แสดงทิศทางของความเค้น ในขณะที่ตัวแปรไอโซโครมาติกจะใช้แสดงค่าความแตกต่างของความเค้นหลัก ( $\sigma_1 - \sigma_2$ )

งานวิจัยหลายงานวิจัย ที่ ทำ การ ศึกษา การ ประยุกต์ ใช้ วิธีวิเคราะห์ความเค้นในช่วงยึดหยุ่นด้วยแสงนี้ต่างก็ได้แนะนำเสนอวิธีการต่างเพื่อที่จะศึกษาตัวแปรทั้งสองดังกล่าวข้างต้น ซึ่งวิธีที่ถูกนำเสนอเหล่านี้ก็มีระดับความถูกต้องเชิงตัวเลขที่ขึ้นอยู่กับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ของสมการความเข้มแสงที่เกี่ยวข้องกับชนิดหรือประเภทของอุปกรณ์ทางแสง (polariscope) ที่ใช้

ในบรรดาวิธีการเหล่านี้แบบจำลอง (photoelastic model) ที่นิยมใช้เพื่อการตรวจสอบการถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีการที่ถูกนำเสนอก็คือ แผ่นวงกลมรับแรงกดในแนวตั้งผ่านแนวเส้นผ่าน



รูปที่ 1 ภาพสี (RGB) 24 บิต ขนาด  $512 \times 480$  พิกเซล ของ วิวนามความเค้นของแผ่นวงกลมรับแรงกดในแนวตั้งผ่านแนวเส้น ผ่านศูนย์กลางโดยที่มุมแผ่นวิเคราะห์ที่ใช้ในการจำลองมีค่าเท่ากับ  $\pi/4$  (ก) ภาพจากการจำลองแบบ และ (ข) ภาพที่ได้จากการทดลอง

ศูนย์กลาง (a circular disk subjected to vertically compressive force) แบบจำลองนี้ได้รับความนิยมก็เนื่องมาจากว่า ผลเฉลยแม่นยำที่แสดงถึงลักษณะการกระจายตัวของความเค้นสามารถกำหนดหาได้ด้วยทฤษฎีการยืดหยุ่น กล่าวคือ องค์ประกอบความเค้น  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  และ  $\tau_{xy}$  สามารถถูกกำหนดหาค่าได้ซึ่งองค์ประกอบความเค้นเหล่านี้จะถูกใช้เพื่อกำหนดหาค่าความเค้นหลัก  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  และทิศทางของความเค้นหลัก  $\phi$  ดังนั้นแบบจำลองรูปแบบวีธีที่สร้างขึ้นนี้สามารถใช้เป็นปัญหาเทียบเคียงได้เป็นอย่างดีในการคิดค้นวิธีการใหม่สำหรับการวิเคราะห์ความเค้น

อย่างไรก็ตาม แบบจำลองแผ่นวงกลมรับแรงกดในแนวตั้งผ่านแนวเส้นผ่านศูนย์กลางก็ยังมีปัญหาที่สำคัญคือ ลักษณะของรูปแบบวีธีที่ได้นั้นไม่มีความเหมาะสมหรือมีข้อมูลไม่เพียงพอต่อการจัดอันดับของวีธี (Fringe numbering) ที่เป็นเช่นนี้ก็เนื่องมาจากว่ารูปแบบวีธีแสดงแต่เพียงลักษณะการกระจายตัวของความเค้นอย่างง่าย ๆ เท่านั้น กล่าวคือลักษณะที่สำคัญของรูปแบบวีธีเช่น จุดกำเนิด (Source) จุดยุบตัว (Sink) จุดสะเทิน (Saddle point) จุดเอกพจน์ (Singular point) และจุดไอโซโทรปิก (Isotropic point) ไม่ได้ปรากฏอยู่ในรูปแบบวีธี ทั้งๆ ที่ลักษณะเหล่านี้มีความสำคัญยิ่งในการกำหนดหาตัวแปรไอโซคลินิกและไอโซโครมาติก [1]

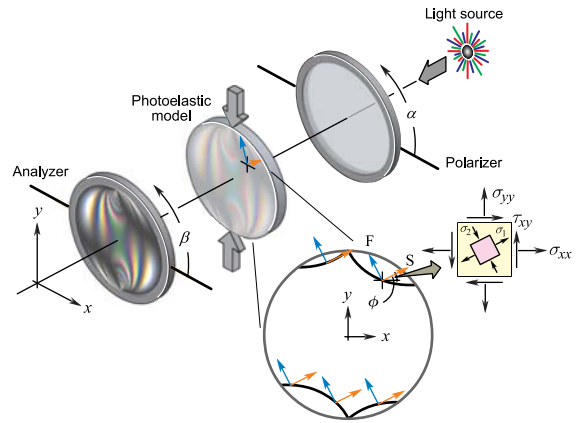
รูปที่ 1 แสดงรูปแบบวีธีที่ได้จากการจำลองแบบและการทดลองของแผ่นวงกลมรับแรงกดในแนวตั้งผ่านแนวเส้นผ่านศูนย์กลาง โดยที่รูปที่ 1(ก) นั้นทำการจำลองแบบโดยใช้สมการองค์ประกอบความเค้นในระบบพิกัดฉาก [1]

$$\sigma_{xx} = \frac{-2P}{\pi t} \left\{ \frac{(R-y)x^2}{r_1^4} + \frac{(R+y)x^2}{r_2^4} - \frac{1}{D} \right\} \quad (1)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{-2P}{\pi t} \left\{ \frac{(R-y)^3}{r_1^4} + \frac{(R+y)^3}{r_2^4} - \frac{1}{D} \right\} \quad (2)$$

$$\tau_{xy} = \frac{2P}{\pi t} \left\{ \frac{(R-y)^2x}{r_1^4} - \frac{(R+y)^2x}{r_2^4} \right\} \quad (3)$$

โดยที่  $r_1^2 = x^2 + (R-y)^2$ ,  $r_2^2 = x^2 + (R+y)^2$ ,  $R$  คือรัศมีของแผ่นวงกลม และ  $D$  คือเส้นผ่านศูนย์กลางของแผ่นวงกลม  $P$



รูปที่ 2 อุปกรณ์เบี่ยงเบนแสงระนาบที่ประกอบไปด้วยแผ่นโพลาไรซ์ แบบจำลองของแผ่นวงกลมรับแรงกดในแนวตั้งผ่านเส้นผ่านศูนย์กลางและแผ่นวิเคราะห์ มุม  $\alpha$ ,  $\phi$  และ  $\beta$  คือมุมระหว่างแกนแสงของแผ่นโพลาไรซ์, ทิศทางความเค้นหลัก  $\sigma_1$  และแกนแสงของแผ่นวิเคราะห์กับแนวแกนอ้างอิง (แกน  $x$ ) ตามลำดับ

คือแรงกดและ  $t$  คือความหนาของแผ่นวงกลม ส่วนรูปที่ 1(ข) นั้นได้มาจากการทดลอง ซึ่งจะเห็นได้ว่าแผ่นวงกลมจะเอียงเล็กน้อยในขณะที่รับแรงกดอันเนื่องมาจากความไม่สมบูรณ์ทางด้านรูปร่าง

จากที่ได้กล่าวข้างต้น จะเห็นได้ว่ารูปแบบวีธีของแผ่นวงกลมรับแรงกดในแนวตั้งผ่านแนวเส้นผ่านศูนย์กลางนั้นให้ข้อมูลไม่เพียงพอต่อการวิเคราะห์ความเค้น ดังนั้นการกำหนดหาแบบจำลองใหม่ซึ่งรูปแบบวีธีประกอบไปด้วยลักษณะต่างๆ ที่กล่าวข้างต้นจึงมีความสำคัญยิ่ง เนื่องจากว่าหากสามารถกำหนดหาได้แล้วก็จะทำให้การประยุกต์ใช้งานนั้นทำได้กว้างขวางมากยิ่งขึ้น ดังนั้นบทความวิจัยนี้จึงนำเสนอการจำลองแบบรูปแบบวีธีของแบบจำลองคานสี่เหลี่ยมรับแรงกระทำเฉพาะจุดที่กึ่งกลางคาน (Rectangular beam carrying a concentrated force at its center) ที่ซึ่งรูปแบบวีธีประกอบไปด้วยลักษณะสำคัญตามที่ได้กล่าวข้างต้น

## 2. สมการควบคุมเพื่อการจำลองรูปแบบวีธี

เนื่องจากการจำลองรูปแบบวีธีในวิธีวิเคราะห์ความเค้นในช่วงยืดหยุ่นด้วยแสงนั้นมีความสัมพันธ์โดยตรงกับความเข้มแสง ดังนั้นการศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของความเข้มแสงที่มีความเกี่ยวข้องสัมพันธ์กับองค์ประกอบความเค้นจึงมีความสำคัญ

### 2.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของความเข้มแสง

ความเข้มแสง  $I$  ที่เคลื่อนที่ผ่านแผ่นเบี่ยงเบนแสงระนาบหรือแผ่นวิเคราะห์ (Analyzer) ของอุปกรณ์เบี่ยงเบนแสงระนาบ ณ จุดพิกัด  $(x, y)$  ใดๆ บนแบบจำลองนั้น (รูปที่ 2) เป็นฟังก์ชันของหลายตัวแปร ซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของความเข้มแสง  $I$  นี้สามารถเขียนได้ว่า [2]

$$I = f(\alpha, \beta, I_p, \phi, t, f\sigma, I_b) \quad (4)$$

โดยที่  $\alpha$  และ  $\beta$  คือมุมระหว่างแกนแสงของแผ่นโพลาไรซ์ และแกนแสงของแผ่นวิเคราะห์กับแนวแกนอ้างอิง (แกน  $x$ ) ตาม

ลำดับ  $I_p(x, y; \lambda)$  คือความเข้มแสงที่ผ่านออกมาจากแผ่นโพลารไรซ์,  $\phi(x, y; \alpha, \beta)$  คือตัวแปรไอโซคลินิกหรือทิศทางของความเค้นหลัก  $\sigma_1$  กับแกนอ้างอิงหรือแกน  $x$ ,  $N(x, y; (\sigma_1 - \sigma_2))$  คืออันดับรี้วหรือตัวแปรไอโซโครมาติก,  $t$  คือความหนาของแบบจำลอง,  $f_\sigma(\lambda)$  คือค่าสัมประสิทธิ์รี้ว ความเค้นของวัสดุซึ่งหาได้จากวิธีการสอบเทียบ (Calibration) และ  $I_b(x, y; \lambda)$  คือความเข้มแสงฉากหลัง และ  $\lambda$  คือความยาวคลื่นแสงที่ใช้งาน (แสงคลื่นเดี่ยวหรือหลายความยาวคลื่น)

ความสัมพันธ์ระหว่างอันดับรี้ว กับ ตัวแปร หนึ่ง ซ้ำ สัมพัทธ์ (Relative retardation,  $\delta$ ) สามารถกำหนดได้ดังนี้

$$\delta = 2\pi N \tag{5}$$

โดยที่  $\delta$  และ  $N$  จะมีความสัมพันธ์กับผลต่างของความเค้นหลัก  $(\sigma_1 - \sigma_2)$  โดยอาศัยกฎแห่งแสงและความเค้น (Stress-optic law)

เพื่อความสะดวกในการเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ระหว่างตัวแปรที่สนใจ ตัวแปรอิสระ หรือตัวแปรต้นต่างๆ เช่น พิกัด  $(x, y)$  หรือความยาวคลื่น  $\lambda$  เป็นต้น จะละไว้ในฐานที่เข้าใจ

**2.2 สมการความเข้มแสงในอุปกรณ์เบี่ยงเบนแสงระนาบ**

จากรูปที่ 2 สมการความเข้มแสง  $I$  ที่ผ่านออกมาจากที่ออกมาจากแผ่นวิเคราะห์ ณ พิกัด  $(x, y)$  ใดๆ เมื่อจัดตำแหน่งให้แกนแสงของแผ่นโพลารไรซ์และแผ่นวิเคราะห์ตั้งฉากกัน  $(\alpha = \beta + \pi/2)$  ซึ่งเรียกว่า การจัดอุปกรณ์แบบฉากหลังมืด (Dark-field setup) คือ [1]

$$I = I_p \sin^2(\pi V) \sin^2 2(\phi - \beta) + I_b \tag{6}$$

การจัดอุปกรณ์แบบฉากหลังสว่าง (Bright-field setup) นั้นสามารถกระทำได้เช่นกันโดยกำหนดให้  $\alpha = \beta$  อย่างไม่ก็ตามจะไม่ขอล่าในรายละเอียด ณ ที่นี้ สำหรับข้อมูลเพิ่มเติมนั้นสามารถค้นหาได้ในเอกสารอ้างอิงหมายเลข [1]

**2.3 การกำหนดหาอันดับรี้วและทิศทางของความเค้นหลัก**

กฎแห่งแสงและความเค้น สามารถเขียนได้ว่า [3]

$$N = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{Ch}{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2) \tag{7}$$

หรือ

$$\frac{Nf_\sigma}{t} = (\sigma_1 - \sigma_2) \tag{8}$$

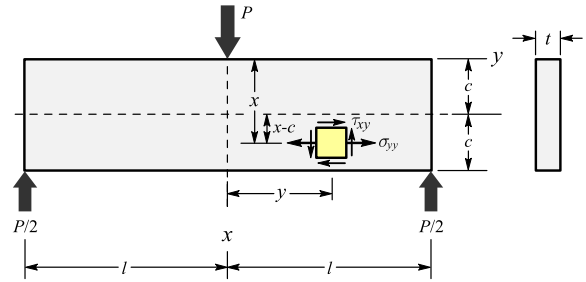
โดยที่  $f_\sigma(\lambda) = \lambda/C$  และ  $C$  คือค่าสัมประสิทธิ์สัมพัทธ์ทางแสงและความเค้น

จากสมการที่ (8) สามารถกำหนดความสัมพันธ์ระหว่างอันดับรี้วกับองค์ประกอบความเค้นในระบบพิกัดฉาก (สมการที่ (1) ถึง (3)) ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$N = \frac{t}{f_\sigma} \left\{ (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2 \right\}^{1/2} \tag{9}$$

สำหรับ ทิศทาง ของ ความเค้น หลัก นั้นสามารถกำหนด หา ได้ โดยอาศัยความสัมพันธ์ทางทฤษฎี ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\tan 2\phi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \tag{10}$$



รูปที่ 3 คานสี่เหลี่ยมมีจุดรองรับอย่างง่ายอยู่ภายใต้แรงกระทำเฉพาะจุด  $P$  ที่กึ่งกลางคาน โดยที่  $l$  คือระยะครึ่งหนึ่งของความยาวคาน,  $c$  คือระยะครึ่งหนึ่งของความสูงของคานและ  $t$  คือความหนาของคาน โดยที่แกน  $x^+$  มีทิศทางลงและแกน  $y^+$  มีทิศทางไปทางขวา

หากพิจารณาสมการที่ (10) แล้วจะเห็นได้ว่าเนื่องจากตัวแปรไอโซคลินิก เป็น ฟังก์ชัน ของ ฟังก์ชัน แทนเจนต์ ผกผัน ดังนั้น  $-\pi/4 < \phi \leq +\pi/4$  ปัญหานี้เป็นปัญหาที่สำคัญอย่างมากในการวิเคราะห์ที่กำหนดตัวแปรไอโซคลินิก เนื่องจากว่าในความเป็นจริงนั้น  $-\pi/2 < \phi \leq +\pi/2$  นอกจากนี้สมการที่ (10) แสดงให้เห็นว่าปัญหานี้จะเกิดขึ้นแม้ว่าสมการที่ (10) ถูกกำหนดมาจากวิธีการทางทฤษฎีก็ตาม กล่าวคือไม่สามารถบอกได้ว่า ค่ามุม  $\phi$  ที่ได้จากสมการที่ (10) นั้นเป็นทิศทางของความเค้นหลัก  $\sigma_1$  หรือ  $\sigma_2$  นอกจากจะกำหนดหาด้วยวิธีวงกลมโมร์ หรือวิธีไอเกินเวกเตอร์ [1] ซึ่งก็จะเห็นได้ว่าเป็นกระบวนการที่ยุ่งยากมากหากจะกำหนดหาทั่วทั้งสนามความเค้น

**3. การเกิดรูปแบบรี้ว**

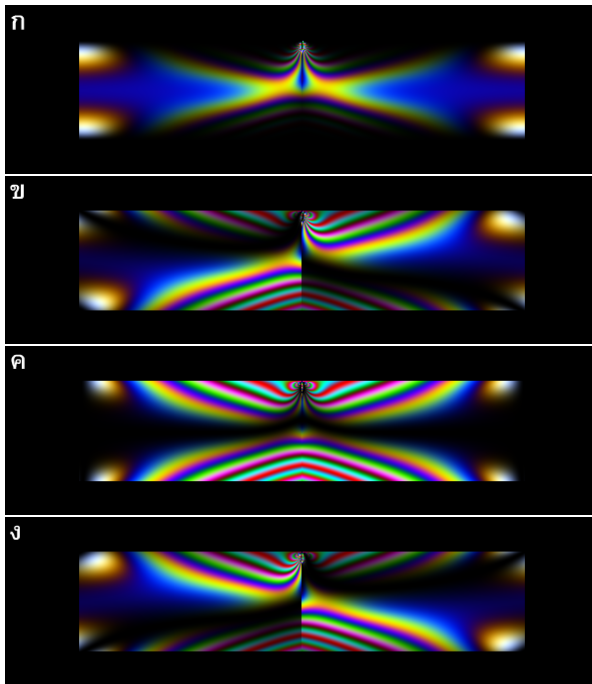
พิจารณาสมการที่ (6) เห็นได้ว่า ความเข้มแสง  $I$  ที่ออกมาจากแผ่นวิเคราะห์นั้นจะมีค่าขึ้นอยู่กับตัวแปรไอโซคลินิกและไอโซโครมาติก ดังนั้นการเกิดรูปแบบรี้วจึงเป็นได้สองลักษณะ คือรี้วไอโซคลินิกและรี้วไอโซโครมาติก

**3.1 การเกิดรี้วไอโซคลินิก**

ในการพิจารณาเบื้องต้นกำหนดให้ ความเข้มแสงฉากหลัง  $I_b = 0$  ก็จะเห็นได้ว่า  $I = 0$  เมื่อ  $\sin^2 2(\phi - \beta) = 0$  ซึ่งหมายความว่า  $(\phi - \beta) = \{k\pi/2 | k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  ลักษณะเช่นนี้จะปรากฏขึ้นเมื่อแกนแสงของแผ่นโพลารไรซ์หรือของแผ่นวิเคราะห์ทับกับทิศทางของความเค้นหลัก  $\sigma_1$  หรือ  $\sigma_2$  และ ณ ตำแหน่งนี้ความเข้มแสงจะมีค่าต่ำสุดหรือเท่ากับศูนย์ เนื่องจากว่าความเค้นเป็นปริมาณที่มีความต่อเนื่อง ดังนั้นรี้วไอโซคลินิกที่เกิดขึ้นจะแปรเปลี่ยนจากมืดสุดไปยังสว่างสุดตามค่าของความเข้มแสง  $I_p$  จากลักษณะดังกล่าวจะเห็นว่าทิศทางของความเค้นก็คือทิศทางของแกนแสงของแผ่นโพลารไรซ์หรือของแผ่นวิเคราะห์ที่เทียบกับแกน  $x$  นั่นเอง

**3.2 การเกิดรี้วไอโซโครมาติก**

เช่นเดียวกับกับหัวข้อที่ 3.1 จะเห็นได้ว่าความเข้มแสง  $I = 0$  เมื่อ  $\sin^2(\pi V) = 0$  หรือ  $(\pi V) = \{0 | N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$



รูปที่ 4 ภาพสี (RGB) 24 บิต ขนาด  $600 \times 170$  พิกเซลของคานที่ได้จากการจำลองแบบตามมุมแผ่นวิเคราะห์ (ก)  $\beta = 0$ , (ข)  $\beta = \pi/8$ , (ค)  $\beta = \pi/4$  และ (ง)  $\beta = 3\pi/8$

อย่างไรก็ตามเนื่องจาก  $N$  เป็นเพียงตัวแปรที่แสดงอันดับของรีวไอโซโครมาติกเท่านั้น ดังนั้นเครื่องหมายลบจึงไม่มีนัยสำคัญใดๆ ทั้งสิ้น ซึ่งต่างจากตัวแปรไอโซคลินิก จากเงื่อนไขดังกล่าว รีวไอโซโครมาติกจะเกิดขึ้นเมื่อ  $N$  มีค่าเป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นแต่ละรีวมิตจะมีอันดับของตัวเองที่แน่นอนในรูปแบบรีวนั้นๆ ไม่ว่าจะนับมาจากทิศทางใดก็ตาม เนื่องจากอันดับรีวเป็นฟังก์ชันของความยาวคลื่น  $\lambda$  ดังนั้นหากแหล่งกำเนิดแสงที่ใช้ในอุปกรณ์เบี่ยงเบนแสงระนาบเป็นแสงคลื่นเดี่ยว (Monochromatic light) แล้วก็จะเกิดรีวสลับกันไประหว่างมิตและสว่างโดยที่ระยะห่างระหว่างรีวและจำนวนของรีวที่เกิดขึ้นก็จะขึ้นอยู่กับค่าความแตกต่างของความเค้นหลัก (ดูสมการที่ (8))

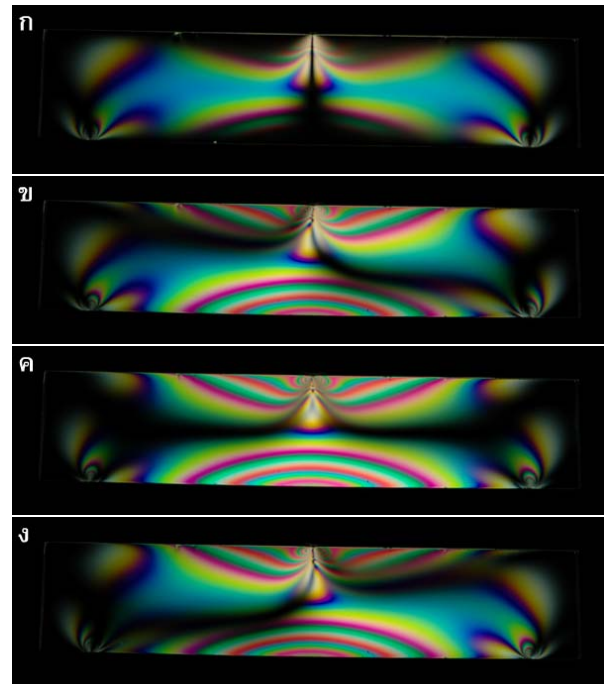
อย่างไรก็ตามหากแหล่งกำเนิดแสงที่ใช้มีหลายสี (Polychromatic light) หรือแสงสีขาว (White light) ก็จะเกิดรีวของสีต่างๆ สลับกันไป สาเหตุที่ทำให้มีสีหลายสีเกิดขึ้นสลับกันไปนั้นก็เนื่องมาจากว่า  $N$  เป็นฟังก์ชันของ  $\lambda$  นั่นก็หมายความว่าขณะที่  $\lambda$  ค่าหนึ่งๆ ทำให้  $I = 0$  แล้ว ก็จะเหลือ  $\lambda$  ค่าอื่นๆ ที่ทำให้  $I \neq 0$  ลำดับการสลับสีนี้สามารถค้นคว้าในรายละเอียดได้ในเอกสารอ้างอิงหมายเลข [1]

## 4. การจำลองรูปแบบรีว

### 4.1 สมการองค์ประกอบความเค้นในระบบพิกัดคาน

สมการองค์ประกอบความเค้นของคานสี่เหลี่ยมรับแรงกระทำเฉพาะจุดที่กึ่งกลางคาน (รูปที่ 3) สามารถเขียนได้ดังนี้ [4,5]

$$\sigma_{xx} = -\frac{2P}{\pi l} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2} \quad (11)$$



รูปที่ 5 ภาพสี (RGB) 24 บิต ขนาด  $600 \times 170$  พิกเซลของคานที่ได้จากการทดลองแบบตามมุมแผ่นวิเคราะห์ (ก)  $\beta = 0$ , (ข)  $\beta = \pi/8$ , (ค)  $\beta = \pi/4$  และ (ง)  $\beta = 3\pi/8$

$$\sigma_{yy} = \frac{2P}{\pi t} \left[ \frac{3\pi}{8c^3} (l \pm y)(x - c) - \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \quad (12)$$

$$\tau_{xy} = \pm \frac{2P}{\pi t} \left[ \frac{3\pi}{16c^3} (2cx - x^2) + \frac{x^2y}{(x^2 + y^2)^2} \right] \quad (13)$$

ในสมการที่ (11) และ (12) นั้น เครื่องหมาย  $\pm$  จะถูกใช้เมื่อ  $y < 0$  และ  $y > 0$  ตามลำดับ โดยที่แกน  $x$  จะขนานกับแนวแรงกระทำ (รูปที่ 3)

สมการที่ (11) ถึง (13) นั้นเกิดขึ้นจากการรวมผลเฉลยที่ได้จากทฤษฎีคานพื้นฐาน (Euler-Bernoulli theory) และผลเฉลยของ Flamant อย่างไรก็ตาม ตามแนวแกนสมมาตร (แนวแกน  $x$ ) นั้นค่าองค์ประกอบความเค้นคือ

$$\sigma_{xx} = \frac{2P}{\pi t} \left( \frac{x}{4c^2} - \frac{1}{x} \right) \quad (14)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{3P}{2tc^3} \left( \frac{l}{2} - \frac{c}{\pi} \right) (x - c) + \frac{P}{2\pi ct} \quad (15)$$

สมการที่ (15) คือผลเฉลยของ Wilson-Stokes [4]

### 4.2 เงื่อนไขการจำลองแบบ

จากสมการที่ (9) และ (10) อันดับรีวและทิศทางของความเค้นหลักสามารถหาค่าได้ โดยอาศัยองค์ประกอบความเค้นที่แสดงในสมการที่ (11) ถึง (15) จากนั้นก็นำไปแทนในสมการที่ (6) ซึ่งก็จะสามารถจำลองรูปแบบรีวสนามความเค้นของคานสี่เหลี่ยมรับแรงกระทำเฉพาะจุดที่กึ่งกลางคานได้ สำหรับการจำลองแบบนี้จะกำหนดเงื่อนไขดังนี้



รูปที่ 6 แผนภาพทิศทางความเค้นหลักในย่าน  $-\pi/2$  ถึง  $+\pi/2$  ซึ่งกำหนดหาด้วยวิธีการคืนรูปเฟส (Phase unwrapping) [6] (ก) แผนภาพที่ได้จากรูปที่ 4 และ (ข) แผนภาพที่ได้จากรูปที่ 5

- คานทำจากแผ่นอีพอกซีเรซิน ซึ่งมีความหนา 6 มิลลิเมตร และในรูปที่ (3)  $P = 135$  นิวตัน,  $l = 50$  มิลลิเมตร และ  $c = 10$  มิลลิเมตร
- $I_p$  จะถูกกำหนดให้มีค่าเท่า 255 (8 บิต) สำหรับแต่ละสีหรือความยาวคลื่น ในที่นี้จะทำการจำลองทั้งหมดสามสีที่ซึ่งเป็นสีองค์ประกอบมูลฐานของสีขาว คือ แดง (612 นาโนเมตร), เขียว (547 นาโนเมตร) และ น้ำเงิน (437 นาโนเมตร) ซึ่งก็จะเป็นภาพ 24 บิต สำหรับ ค่าสัมประสิทธิ์ริ้วความเค้นของวัสดุที่ความยาวคลื่นทั้งสามค่าซึ่งได้จากการเทียบเคียงนั้นคือ  $f_{\sigma,R} = 11.20$ ,  $f_{\sigma,G} = 10.01$  และ  $f_{\sigma,B} = 8.000$  นิวตันต่อมิลลิเมตรต่อริ้ว ค่าทั้งสามนี้จะถูกใช้ในสมการที่ (9) ซึ่งริ้วที่เกิดขึ้นก็จะมีลักษณะคล้ายคลึงหรือเสมือนกับการใช้แหล่งกำเนิดที่เป็นแสงสีขาว
- $I_b$  จะถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 0 เนื่องจากว่าค่าความเข้มแสงจากหลังนี้เป็นเพียงค่าที่ทำให้รูปคลื่นของความเข้มแสงเลื่อนขึ้นไปตามแนวตั้งเท่านั้น (ดูสมการที่ 6) อย่างไรก็ตามหากต้องการกำหนดให้  $I_b$  มีค่ามากกว่า 0 แล้ว ผลรวมระหว่าง  $I_p$  กับ  $I_b$  จะต้องไม่ค่าไม่เกิน 255

## 5. ผลลัพธ์และการวิจารณ์

ในส่วนนี้จะได้นำเสนอผลลัพธ์ที่ได้จากการทำการจำลองแบบและจากการทดลอง รวมทั้งการกำหนดค่าทิศทางของความเค้นเพื่อเป็นการเปรียบเทียบในและกรณียืนยันผลในเบื้องต้น

### 5.1 รูปแบบริ้วที่ได้จากการจำลองแบบ

หลังจากทำการจำลองแบบริ้วสนามความเค้นตามเงื่อนไขในหัวข้อที่ 4.2 แล้ว ก็จะได้ภาพริ้วสนามความเค้น รูปที่ (4) แสดงภาพของริ้วสนามความเค้นของคานที่ได้จากการจำลองแบบ ในขณะที่รูปที่ (5) แสดงภาพของริ้วสนามความเค้นที่ได้จากการทดลองจากการเปรียบเทียบจะเห็นว่า ลักษณะของริ้วบริเวณรอบกึ่งกลางของคานในรูปที่ (4) และ (5) มีความคล้ายคลึงกัน อย่างไรก็ตามจะเห็นได้ว่าคานในรูปที่ (5) จะยาวกว่าคานที่ได้จากการทำแบบจำลอง (รูปที่ 4) ที่เป็นเช่นนี้ก็เพราะว่า ในทางปฏิบัติหรือการทดลองนั้นไม่

สามารถกำหนดจุดรองรับในลักษณะที่แสดงในรูปที่ (3) ได้

สำหรับ รูปแบบ ริ้ว บริเวณ รอบๆ จุด รองรับ นั้น จะ มีความแตกต่าง กัน อย่าง เห็น ได้ ชัด ซึ่ง ความ แตกต่าง ที่ เกิด ขึ้น นี้ เป็น ไปตามหลักการของ Saint Venant ที่กล่าวไว้ว่า หากแรงหนึ่งที่เกิดกระทำต่อพื้นที่ขนาดเล็กๆ ถูกแทนด้วยระบบของแรงอื่นที่สมมูลกันและกระทำต่อพื้นที่เดียวกันแล้ว ระบบแรงใหม่ก็จะก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของรูปแบบริ้วในบริเวณใกล้เคียง กับจุดที่ระบบแรงกระทำเท่านั้น โดยที่ไม่ก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงใดๆ ในบริเวณที่ห่างออกไปจากพื้นที่นี้เป็นระยะทางหนึ่งๆ ที่ยาวกว่ามิติเชิงเส้นของพื้นที่นั้น [4] ดังนั้นหากพิจารณารูปที่ (4) และ (5) อีกครั้งก็จะเห็นได้ว่าที่ระยะประมาณความกว้างของคานวัดไปในแนวนอนจากจุดรองรับ (จุดใดก็ได้) รูปแบบริ้วก็จะคล้ายคลึงกันดังที่ได้กล่าวแล้วข้างต้น

แม้ว่ารูปแบบริ้วจะมีความ คล้ายคลึงกัน แต่หากสังเกตดูโดยละเอียดแล้วจะเห็นได้ว่า ระดับความมืดสว่างของรูปแบบริ้วนั้นไม่เท่ากัน ที่เป็นเช่นนี้ก็เพราะว่า ในการจำลองแบบนั้นได้กำหนดให้ความเข้มแสงจากหลังมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นบริเวณใดๆ ก็ตามที่ทิศทางของความเค้นหลักตัวใดตัวหนึ่งทับกับแนวแกนแสงของแผ่นโพลาริซหรือแผ่นวิเคราะห์ ความเข้มแสงที่กำหนดหาได้จากสมการที่ 6 ก็จะมีค่าเท่ากับศูนย์และริ้วบริเวณนั้นก็จะมืดดำหรือมืดที่สุด อย่างไรก็ตามในการทดลองนั้นความเข้มแสงจากหลังจะมีค่ามากกว่าศูนย์เสมอ ดังนั้นจึงเป็นเหตุให้รูปแบบริ้วที่ได้จากการทดลองมีความสว่างมากกว่ารูปแบบริ้วที่ได้จากการจำลองแบบ

### 5.2 การเกิดขึ้นของจุดไอโซโทรปิก

สิ่งที่ช่วยยืนยันในสิ่งที่ได้อธิบายแล้วนั้นก็คือลักษณะของจุดไอโซโทรปิก (Isotropic point) ซึ่งจะเกิดขึ้นบริเวณกึ่งกลางคานเหนือแนวเส้นสะเทินเล็กน้อยโดยมีรูปลักษณะคล้ายคลึงกับหยดน้ำซึ่งตำแหน่งของจุดไอโซโทรปิกทั้งสองนี้สามารถกำหนดหาได้จากทฤษฎี Wilson-Stokes [4]

จาก ทฤษฎี นี้ การ เกิด ขึ้น ของ จุด ไอ โซ โทร ปิก จะ ขึ้น อยู่ กับอัตราส่วน  $l/c$  กล่าวคือหาก  $l/c < 4.24$  แล้วก็จะไม่มีจุดไอโซโทรปิกเกิดขึ้น แต่ถ้าหาก  $l/c = 4.24$  แล้วก็จะเกิดจุดไอโซโทรปิกจำนวนหนึ่งจุด อย่างไรก็ตามหาก  $l/c > 4.24$  จะมีจุดไอโซโทรปิกเกิดขึ้นจำนวนสองจุดโดยที่จุดทั้งสองจะมีตำแหน่งใกล้เคียงกัน เนื่องจากว่าคานที่ใช้ในการทดลองนั้นมี  $l/c = 5$  ดังนั้นจึงจะมีจุดไอโซโทรปิกสองจุดเกิดขึ้นอย่างแน่นอนและจุดทั้งสองจะมีเครื่องหมายต่างกัน กล่าวคือเป็นบวกหรือลบ โดยที่จุดที่อยู่ต่ำสุดวัดจากจุดกำเนิดแกนอ้างอิงจะมีเครื่องหมายบวก ในขณะที่จุดที่อยู่ด้านบนจะมีเครื่องหมายลบ ด้วยลักษณะสำคัญของจุดไอโซโทรปิก กล่าวคือ ที่จุดนี้  $(\sigma_1 - \sigma_2) = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) = 0$  ดังนั้นจุดไอโซโทรปิกจึงเป็นจุดที่มีดิริ้วของสนามความเค้น อย่างไรก็ตามหากพิจารณารูปที่ 5 ก็ จะ เห็น ได้ ว่า จุด ไอ โซ โทร ปิก ไม่ ใช้ จุด ดำ มืด และที่เป็นเช่นนี้ก็เพราะว่าความเข้มแสงจากหลังจะมีค่ามากกว่าศูนย์นั่นเอง

### 5.3 การเปรียบเทียบแผนภาพทิศทางความเค้นหลัก

รูปที่ 6 แสดงแผนภาพทิศทางของความเค้นหลักในย่านแท้จริง

กล่าวคือ  $-\pi/2$  ถึง  $+\pi/2$  แผนภาพนี้กำหนดหามาจากวิธีการคืนรูปเฟส (Phase unwrapping) [6] รูปที่ 6(ก) คือแผนภาพที่เกิดจากภาพจำลองแบบริ้วสนามความเค้นในรูปที่ 4 ส่วนรูปที่ 6(ข) เกิดจากภาพริ้วสนามความเค้นที่ได้จากการทดลองในรูปที่ 5

ในรูปที่ 6(ก) นั้นสามารถเห็นจุดไอโซโทรปิกได้อย่างชัดเจน (จุดในวงกลม) จำนวนสองจุดตามทฤษฎี Wilson-Stokes อย่างไรก็ตามสำหรับในรูปที่ 6(ข) จะไม่สามารถเห็นจุดไอโซโทรปิกได้อย่างชัดเจน ในทางตรงกันข้าม บริเวณนั้นเป็นพื้นที่ไอโซโทรปิก (Isotropic region) หากพิจารณาอาณาบริเวณที่อยู่เหนือจุดไอโซโทรปิกจุดล่างก็จะพบว่าค่าทิศทางของความเค้นหลักมีการเปลี่ยนแปลงค่าอย่างทันทีทันใดจาก  $+\pi/2$  ไปเป็น  $-\pi/2$  ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา (เปลี่ยนจากสีขาวเป็นสีดำ) ดังนั้นจุดไอโซโทรปิกล่างจึงมีเครื่องหมายเป็นบวก ส่วนจุดไอโซโทรปิกบนนั้นจะมีเครื่องหมายเป็นลบ และเมื่อพิจารณาโดยรวมแล้วจะเห็นว่าลักษณะการกระจายของทิศทางความเค้นหลักทั่วทั้งพื้นที่นั้นมีลักษณะเหมือนกัน ฟังสังเกตว่า ตามค่าจำกัดความของทิศทางของความเค้นหลัก  $\phi$  (รูปที่ 2) นั้นสามารถสรุปได้ว่า แผนภาพทิศทางความเค้นหลักที่แสดงในรูปที่ 6 นั้นเป็นของความเค้นหลัก  $\sigma_1$

## 6. สรุปผล

บทความนี้ได้นำเสนอวิธีการที่กำหนดหาปัญหาเทียบเคียงใหม่เพื่อใช้เป็นปัญหาเทียบเคียงมาตรฐานในวิธีวิเคราะห์ความเค้นในช่วงยืดหยุ่นด้วยแสง จากการเปรียบเทียบภาพริ้วสนามความเค้นที่ได้จากการจำลองแบบและที่ได้จากการทดลองพบว่ามีความสอดคล้องกันโดยเฉพาะอย่างยิ่งบริเวณกึ่งกลางคาน ส่วนที่มีความแตกต่างกันก็คือบริเวณจุดรองรับซึ่งก็เป็นไปตามหลักการของ Saint Venant

นอกจากนี้จากการเปรียบเทียบแผนภาพทิศทางของความเค้นหลักก็พบว่าลักษณะการกระจายตัวของทิศทางความเค้นหลักมีลักษณะที่เหมือนกันและค่าของทิศทางความเค้นหลักนี้ก็สามารถแสดงในย่านแท้จริงได้อย่างถูกต้อง กล่าวคือ  $-\pi/2 < \phi \leq +\pi/2$  ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าแผนภาพที่ได้จากการจำลองแบบของแบบจำลองคานสี่เหลี่ยมมีจุดรองรับอย่างง่ายอยู่ภายใต้แรงกระทำเฉพาะจุดที่กึ่งกลางคานสามารถใช้เป็นปัญหาเทียบเคียงแทนปัญหาเทียบเคียงเดิม (แผ่นวงกลมรับแรงกดในแนวตั้งผ่านแนวลึงผ่านศูนย์กลาง) ได้เป็นอย่างดี

## เอกสารอ้างอิง

- [1] Ramesh, K. 2000. Digital Photoelasticity: Advanced Technique and Applications. Springer, Berlin Germany.
- [2] Jones, I.A. and Wang, P. 2005. An Overdetermined Phase-stepping Strategy for the Capture of High-quality Photoelastic Data. Journal of Strain Analysis, 40: 477-492.
- [3] Dally, J.W. and Riley, W.F. 1991. Experimental Stress Analysis. McGraw-Hill, Singapore.
- [4] Frocht, M.M. 1948. Photoelasticity, Vol. II, John Wiley & Sons, New York, U.S.A.
- [5] Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N. 1970. Theory of Elasticity, 3rd Edition, McGraw-Hill, Singapore.
- [6] Pinit, P. and Umezaki, E. 2007. Digitally Whole-field Analysis of Isoclinic Parameter in Photoelasticity by Four-step Color Phase-shifting Technique. Optics and Laser in Engineering, 45: 795-807.