

การหาแนววิถีความเค้นหลักด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์และโฟโตอีลาสติซิตีเชิงเลข

Determination of stress trajectories by means of analytical method and digital photoelasticity

พิเชษฐ พินิจ

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี บางมด ทุ่งครุ กรุงเทพฯ 10140
E-mail: pichet.pin@kmutt.ac.th

Pichet Pinit

Department of Mechanical Technology Education, Faculty of Industrial Education and Technology,
King Mongkut's University of Technology Thonburi, Bangmod, Toongkru, Bangkok 10140
E-mail: pichet.pin@kmutt.ac.th

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอวิธีการหาแนววิถีความเค้นหลักซึ่งใช้แสดงวิถีการที่มีความสำคัญต่อการออกแบบเชิงกลโดยวิธีเชิงวิเคราะห์และโฟโตอีลาสติซิตีเชิงเลข การหาวิถีความเค้นด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์นั้นสามารถกระทำได้แต่มีความยุ่งยากซับซ้อนอันเนื่องมาจากการที่ต้องใช้คณิตศาสตร์ชั้นสูงและเหมาะสำหรับปัญหาอย่างง่ายเท่านั้น ด้วยการประยุกต์ใช้วิธีโฟโตอีลาสติซิตีเชิงเลขและวิธีการคืนรูปเฟส แนววิถีความเค้นสามารถหาได้โดยง่ายจากแผนภาพไอโซคลินิกเต็มรูป

คำหลัก วิธีเชิงวิเคราะห์, โฟโตอีลาสติซิตีเชิงเลข, วิถีความเค้น, ทิศทางของความเค้นหลัก

Abstract

This paper presents the determination of the stress trajectories (isostatics) being used to represent the load path by means of the analytical method and digital photoelasticity. It is considerably difficult to determine the stress trajectories by only using the analytical method since the method does require great knowledge of advanced mathematics and is only suitable for a simple problem. With the application of the digital photoelasticity and phase unwrapping, the stress trajectories can be determined easily from the map of unwrapped isoclinics.

Keywords: Analytical method, Digital photoelasticity, Stress trajectories, Directions of principal stress

1. บทนำ

ในช่วงการเริ่มต้นของการออกแบบทางวิศวกรรม ผู้ออกแบบจะมีอิสระอย่างเต็มที่ในการที่จะกำหนดรูปร่างของชิ้นส่วนของเครื่องจักรหรือโครงสร้าง อย่างไรก็ตามเนื่องจากว่าชิ้นส่วนที่กำลังถูกออกแบบอยู่นั้นไม่มีตัวตนอยู่จริง การวิเคราะห์ความเค้นต่างๆ จึงไม่สามารถกระทำได้และด้วยเหตุนี้เองรูปร่างและมิติต่างๆ ของชิ้นส่วนดังกล่าวจึงต้องมีการกำหนดขึ้นมาโดยอ้างอิงจากการเปรียบเทียบและประสบการณ์ของผู้ออกแบบเองเป็นสำคัญ

ผู้ออกแบบจะใช้วิถีภาระ (Load path) ในการอธิบายการเคลื่อนที่ของภาระผ่านไปในชิ้นส่วน วิถีภาระคือเส้นที่แสดงการเคลื่อนที่ของภาระโดยเริ่มจากจุดที่ภาระกระทำผ่านไปในชิ้นส่วนและไปยังจุดรองรับของชิ้นส่วนหรือโครงสร้างโดยที่แนวเส้นที่ภาระเคลื่อนที่ไปนี้จะเส้นทางที่สั้นที่สุดและผ่านส่วนที่มีความแข็งแรงน้อยที่สุด [1] เส้นทางภาระนี้มีความสัมพันธ์โดยตรงกับแนววิถีความเค้นหลัก (Stress trajectories หรือ isostatics) ซึ่งถูกใช้เพื่อแสดงการไหลของความเค้นในชิ้นส่วนนั้นๆ

Frocht [2] ได้ให้คำจำกัดความของแนววิถีความเค้นหลักไว้ว่าเป็นกลุ่มของเส้นรอบขอบ (Contour lines) โดยที่จุดหนึ่งๆ บนเส้นรอบขอบนี้จะสัมพันธ์กับทิศทางความเค้นหลักที่จุดนั้นๆ จากความสัมพันธ์ระหว่างวิถีภาระและแนววิถีความเค้นหลัก ดังนั้นหากผู้ออกแบบทราบแนววิถีความเค้นหลักที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนหนึ่งๆ ก็สามารถนำไปหาวิถีภาระได้ซึ่งจะส่งผลให้ง่ายต่อการกำหนดรูปร่างของชิ้นส่วนนั้น

อย่างไรก็ตาม การหาแนววิถีความเค้นหลักนั้นก็เป็นเรื่องที่ยากเช่นเดียวกันทั้งนี้ก็เนื่องมาจากว่าความเค้นเป็นปริมาณที่ต่อเนื่องทั่วทั้งอาณาบริเวณของชิ้นส่วน สำหรับการศึกษาเกี่ยวกับ

ความเค้นนั้นยังมีกลุ่มของเส้นโค้งอีกกลุ่มหนึ่งที่มีความสัมพันธ์โดยตรงกับแนววิถีความเค้น เส้นโค้งกลุ่มนี้คือ เส้นไอโซคลินิก (Isoclinic lines หรือ isoclinics) หรือ เส้นความชันคงที่โดยที่ทุกๆ จุดบนเส้นหนึ่งๆ จะมีค่าทิศทางความเค้นหลักเท่ากัน [2] การหาแนววิถีความเค้นหลักนั้นสามารถกระทำได้สามวิธีคือ

- การวาดด้วยมือ
- การหาด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ และ
- การหาจากเส้นไอโซคลินิก

วิธีแรกนั้นปฏิบัติได้ยากทั้งนี้เนื่องมาจากว่าความเค้นเป็นปริมาณต่อเนื่องดังที่กล่าวแล้วข้างต้น ดังนั้น การที่จะวาดให้ครอบคลุมทั่วทั้งอาณาบริเวณของชิ้นส่วนจึงต้องใช้ความพยายามอย่างสูงและใช้เวลามาก

วิธีที่สองนั้นสามารถกระทำได้เฉพาะปัญหาต่างๆ เท่านั้น [4] (ดูหัวข้อ 2.3) เนื่องจากว่าต้องอาศัยการแก้สมการที่อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งในบางปัญหานั้นสมการเชิงอนุพันธ์นี้อาจอยู่ในรูปของอนุกรมของตัวแปรอิสระ นอกจากนี้หากมีภาวะที่ไม่ต่อเนื่อง (Discontinuity) ในสนามความเค้นแล้ว การหา ก็จะไม่มีความยากลำบากมากยิ่งขึ้นหรือไม่สามารถหาได้เลย

ส่วนวิธีที่สามนั้นสามารถกระทำได้หากทราบเส้นไอโซคลินิกซึ่งสามารถหาได้จากสมการทิศทางความเค้นหลักดังนี้

$$\tan 2\phi_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \quad (1)$$

โดยที่ ϕ_p คือตัวแปรไอโซคลินิกซึ่งแสดงค่าทิศทางความเค้นหลัก, σ_{xx} , σ_{yy} และ τ_{xy} คือองค์ประกอบความเค้นในระบบพิกัดฉาก ส่วนตัวอักษรห้อย p นั้นมีความหมายว่าหากใช้ฟังก์ชันแทนแทนจุดผกผันในการหาค่า ϕ_p แล้ว จะพิจารณาเฉพาะค่าหลัก (Principal values) ซึ่งอยู่ในช่วง -90° ถึง $+90^\circ$ เท่านั้น พิจารณาสมการที่ (1) จะเห็นได้ว่าที่จุด $P(x, y)$ ในทุก สมการที่ (1) จะให้ค่าทิศทางของความเค้นหลัก

อย่างไรก็ตามหากพิจารณาโดยละเอียดแล้วจะพบว่าการประยุกต์ใช้สมการที่ (1) ในทางปฏิบัตินั้นจะกระทำได้ยาก ทั้งนี้เนื่องจากว่า องค์ประกอบความเค้นทั้งสามมององค์ประกอบนั้นสามารถหาได้ด้วยทฤษฎีสภาพยืดหยุ่นเท่านั้นและปัญหาที่สามารถหาองค์ประกอบความเค้นเหล่านี้ได้ก็มีอยู่จำกัดไม่ครอบคลุมทุกๆ ปัญหา นอกจากนี้ปัญหาที่สำคัญอีกอย่างหนึ่งก็คือค่าทิศทางความเค้นหลัก ϕ_p ที่คำนวณได้จากสมการที่ (1) จะมีค่าอยู่ในย่าน -45° ถึง $+45^\circ$ เท่านั้นซึ่งจะมีชื่อเรียกว่า ย่านเฟสซ้อนรูป (Wrapped phase range) ในขณะที่ค่าจริงของทิศทางความเค้นหลัก ϕ_p จะมีค่าอยู่ในย่าน -90° ถึง $+90^\circ$ ซึ่งจะมีชื่อเรียกว่า ย่านเฟสเต็มรูป (Unwrapped phase range)

การที่จะแก้ปัญหาข้างต้น ผู้ออกแบบจึงจำเป็นต้องอาศัยวิธีการอื่น เช่น วิธีการเชิงตัวเลข (วิธีผลต่างสืบเนื่อง และ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นต้น) และวิธีการเชิงทดลอง (วิธีมาตรวัดความเครียดและวิธีโฟโตอีลาสติซิตี เป็นต้น) สำหรับวิธีการเชิงทดลองนั้นโฟโตอีลาสติซิตีเชิงเลขเป็นวิธีการที่นิยมกันใช้มาก [3]

เพื่อที่จะแก้ปัญหาดังที่กล่าวแล้ว บทความนี้จึงมีวัตถุประสงค์ที่จะแสดงการหาแนววิถีความเค้นหลักด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์และวิธีโฟโตอีลาสติซิตีเชิงเลขเพื่อการยืนยันผลจากการประยุกต์ใช้วิธีโฟโตอีลาสติซิตีเชิงเลขกับรื้อสนามความเค้นจริงในการหาแนววิถีความเค้นหลัก

สำหรับตัวแบบที่ใช้ในการศึกษาในครั้งนี้คือ ตัวแบบแผ่นจานกลมรับแรงเข้กดในแนวเส้นผ่านศูนย์กลาง (A circular disk under diametral compression) และตัวแบบโครงหักมุมรับแรงเข้กดผ่านจุดเซนทรอยด์ (An angle bucket under compression)

2. การหาแนววิถีความเค้นหลักด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์

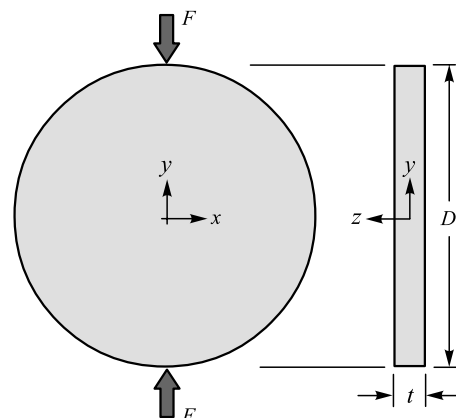
2.1 สนามความเค้นของแผ่นจานกลมรับแรงเข้กดในแนวเส้นผ่านศูนย์กลาง

ผลเฉลยแม่นตรงของสมการองค์ประกอบความเค้น σ_{xx} , σ_{yy} และ τ_{xy} ที่ซึ่งแสดงสนามความเค้นในระบบพิกัดฉากสามารถเขียนได้ดังนี้ [3] (รูปที่ 1)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{-2P}{\pi t} \begin{Bmatrix} \frac{(R-y)x^2}{[x^2+(R-y)^2]^2} + \frac{(R+y)x^2}{[x^2+(R+y)^2]^2} - \frac{1}{2R} \\ \frac{(R-y)^3}{[x^2+(R-y)^2]^2} + \frac{(R+y)^3}{[x^2+(R+y)^2]^2} - \frac{1}{2R} \\ \frac{(R+y)^2x}{[x^2+(R+y)^2]^2} - \frac{(R-y)^2x}{[x^2+(R-y)^2]^2} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

โดยที่ R คือรัศมีของแผ่นวงกลม, D คือเส้นผ่านศูนย์กลางของแผ่นวงกลม, F คือแรงเข้กดและ t คือความหนาของแผ่นวงกลม สำหรับผลเฉลยแม่นตรงนี้ได้จากทฤษฎีสภาพยืดหยุ่น

หากทำการแทนค่าองค์ประกอบความเค้นจากสมการที่ (2) ลงในสมการที่ (1) ก็จะสามารถหาค่าทิศทางของความเค้นหลักได้ อย่างไรก็ตามเนื่องจากว่า พจน์ $-2F/\pi t$ เป็นพจน์ร่วมขององค์ประกอบความเค้นทั้งสามค่า ดังนั้นค่าทิศทางความเค้นหลัก ϕ_p ที่หาได้จากสมการที่ (1) จึงไม่ขึ้นอยู่กับขนาดของแรงเข้กด F และความหนา t



รูปที่ 1 ปัญหาแผ่นจานกลมขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง D รัศมี R หนา t รับแรงเข้กด F ตามแนวเส้นผ่านศูนย์กลาง

2.2 สมการแนววิถีความเค้นหลักทั่วไป

เนื่องจากว่าแนววิถีความเค้นหลักคือเส้นที่สัมผัสกับทิศทางความเค้นหลัก ดังนั้น แนววิถีความเค้นหลักก็คือค่าความชันของเส้นไอโซคลินิกที่จุดหนึ่งๆ ซึ่งทำให้เขียนเป็นสมการได้ดังนี้ [4]

$$\tan \phi_p = \frac{dy}{dx} \quad (3)$$

จากสมการที่ (1) สามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$\tan 2\phi_p = \frac{2 \tan \phi_p}{1 - \tan^2 \phi_p} = \frac{2 \frac{dy}{dx}}{1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \quad (4)$$

จัดสมการที่ (4) ให้อยู่ในรูปของสมการพหุนามกำลังสองของ ϕ_p และหารากของสมการดังกล่าวได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}}{2\tau_{xy}} \right) \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}}{2\tau_{xy}} \right)^2} \quad (5)$$

จะเห็นได้ว่าสมการ (5) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่สามารถแยกตัวแปรได้ โดยที่เครื่องหมาย \pm หน้าเครื่องหมายกรณฑ์นั้นแสดงถึงการตั้งฉากซึ่งกันและกันของแนววิถีความเค้นหลักซึ่งสอดคล้องกับทิศทางความเค้นหลักทั้งสอง ดังนั้นการแก้สมการที่ (5) ด้วยวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ในทางทฤษฎีนั้นจะกระทำได้ยากมาก

2.3 สมการแนววิถีความเค้นของแผ่นจานกลมรับแรงข้มกดในแนวเส้นผ่านศูนย์กลาง

Frocht [5] ได้แสดงไว้ว่า ความชัน ณ จุด $P(x, y)$ ใดๆ ในแผ่นจานกลมรับแรงข้มกดในแนวเส้นผ่านศูนย์กลาง สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\tan \phi_p = \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{R^2 + x^2 - y^2} \quad (6)$$

สมการที่ (6) สามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$2xydx - (R^2 + x^2 - y^2)dy = Mdx + Ndy \quad (7)$$

รูปแบบของสมการที่ (7) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร โดยที่ $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ ดังนั้นตัวประกอบการคูณเพื่อการแก้สมการ ก็คือ

$$\mu(y) = e^{\int \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dy} = -\frac{2}{y} \quad (8)$$

นำ $\mu(y)$ คูณตลอดสมการที่ (7) และจัดพจน์ต่างๆให้อยู่ในรูปที่เหมาะสม จากนั้นทำการปริพันธ์ก็จะได้คำตอบคือ

$$y^2 - Cy = -x^2 - R^2 \quad (9)$$

โดยที่ C คือ ค่าคงที่ซึ่งได้จากการปริพันธ์ และเนื่องจากว่า C เป็น

ค่าคงที่ใดๆ ดังนั้นหากกำหนดให้ $H = \frac{C}{2}$ แล้วจัดสมการใหม่ก็จะได้สมการวงกลมคือ

$$x^2 + (y - H)^2 = H^2 - R^2 \quad (10)$$

สมการที่ (10) สะท้อนความเป็นจริงของลักษณะปัญหา กล่าวคือเป็นคำตอบที่แสดงวิถีความเค้นของแผ่นจานกลม นอกจากนี้สมการที่ (10) แสดงให้เห็นว่าจุดศูนย์กลางของแนววิถีความเค้นหลักทุกๆ เส้นนั้นจะอยู่บนแกน y ดังนั้นแนววิถีความเค้นที่เกิดขึ้นจะมีลักษณะเป็นเส้นในแนวนอน

สำหรับแนววิถีความเค้นหลักที่ตั้งฉากกับสมการที่ (6) นั้นสามารถหาได้โดยเริ่มจากเขียนสมการความชันใหม่ ดังนี้

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{R^2 + x^2 - y^2}{2xy} \quad (11)$$

ซึ่งเมื่อใช้วิธีการเดียวกันกับที่แสดงข้างต้นแล้วก็จะได้สมการวงกลมอีกสมการหนึ่งซึ่งแสดงแนววิถีความเค้นหลักในแนวตั้ง คือ

$$(x - V)^2 + y^2 = V^2 + R^2 \quad (12)$$

โดยที่ V คือ ค่าคงที่ซึ่งหาได้ในลักษณะเดียวกันกับค่าคงที่ H

3. การหาแนววิถีความเค้นหลักด้วยวิธีโพโตอีลาสติคิตีเชิงเลข

การหาแนววิถีความเค้นหลักด้วยวิธีนี้นั้นจำเป็นต้องทราบค่าทิศทางความเค้นหลัก ϕ_p ในย่านจริง กล่าวคือ ในย่าน -90° ถึง $+90^\circ$ ดังนั้นด้วยสมการที่ (1) จะไม่สามารถหาค่าได้ทั้งนี้เนื่องมาจากว่า ฟังก์ชันแทนเจนต์ผกผันจะให้ค่าในย่าน -90° ถึง $+90^\circ$ เท่านั้นซึ่งส่งผลให้ค่าทิศทางความเค้นหลัก ϕ_p มีค่าอยู่ในย่าน -45° ถึง $+45^\circ$ เท่านั้น สำหรับการใส่ฟังก์ชันแทนเจนต์ผกผันแบบสี่จุดภาคนั้นฟังก์ชันแทนเจนต์ผกผันจะให้ค่าในย่าน -180° ถึง $+180^\circ$ ซึ่งก็จะส่งผลให้ค่าทิศทางความเค้นหลัก ϕ_p มีค่าอยู่ในย่าน -90° ถึง $+90^\circ$ แต่ก็เป็นจริงสำหรับบางพื้นที่ในตัวอย่างเท่านั้น การแก้ปัญหาเรื่องนี้จะไม่กล่าวในที่นี้แต่ผู้อ่านสามารถอ่านเพิ่มเติมได้ในบทความอื่น [6]

การหาทิศทางความเค้นหลัก ϕ_p ในย่านจริงนั้นจะต้องอาศัยวิธีการคืนรูปเฟส (Phase unwrapping) ซึ่งในบทความนี้จะใช้วิธีการคืนรูปเฟสที่ผู้นิพนธ์บทความได้นำเสนอไว้แล้ว [7] เนื่องจากว่าวิธีการคืนรูปเฟสที่กล่าวถึงนี้ สามารถคืนรูปเฟสได้ทั้งปัญหาที่ไม่มีภาวะที่ไม่ต่อเนื่องและที่มีภาวะที่ไม่ต่อเนื่องในสนามความเค้นโดยเฉพาะอย่างยิ่งจุดไอโซทรอปิก ดังนั้นจึงพอจะสรุปได้ ณ ที่นี้ว่า การหาแนววิถีความเค้นด้วยวิธีโพโตอีลาสติคิตีเชิงเลขนั้นสามารถทำได้ง่ายกว่าวิธีเชิงวิเคราะห์

สำหรับวิธีการแสดงแนววิถีความเค้นนั้นจะอาศัยค่าทิศทางความเค้นหลัก ϕ_p โดยตรง โดยทำการกำหนดจุดหรือตำแหน่งที่ต้องการทราบแนววิถีความเค้นแล้วทำการลากเส้นตรงสั้น (Lineal

elements) ซึ่งมุมที่เส้นตรงสั้นกระทำกับแนวนอนก็คือค่า ϕ_p นั้นเอง ด้วยเส้นตรงสั้นเหล่านี้ก็จะทำให้เห็นภาพแนววิถีความเค้นของความเค้นหลักทั้งสองตัว

5. ผลลัพธ์และการวิจารณ์

ในส่วนนี้จะได้นำเสนอผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์และวิธีไฟโอดีลาสติคซิติเชิงเลข

5.1 ผลลัพธ์จากวิธีเชิงวิเคราะห์

รูปที่ 2 แสดงสนามแนววิถีความเค้นหลัก σ_1 และ σ_2 บนจตุภาคที่ 1 ของตัวแบบแผ่นจานกลมรับแรงข้มกตในแนวเส้นผ่านศูนย์กลาง (รูปที่ 1) โดยที่การสร้างแนววิถีความเค้นเหล่านี้กำหนดให้ $R = 15$ มิลลิเมตร

พิจารณารูปที่ 2ก จะเห็นได้ว่าลักษณะการกระจายตัวของแนววิถีความเค้นหลัก σ_1 มีลักษณะเป็นวงกลมโดยที่จุดศูนย์กลางของวงกลมมีตำแหน่งอยู่บนแกน y สำหรับพิกัดของจุด $P(x, y)$ ใดๆนั้นสามารถหาได้จากสมการที่ (10) โดยจัดรูปแบบสมการใหม่ดังนี้

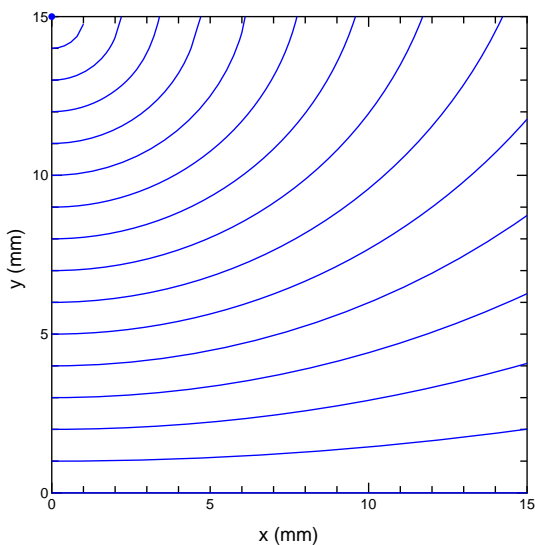
$$y = H \pm \sqrt{H^2 - R^2 - x^2} \quad (13)$$

ซึ่งเครื่องหมายที่ใช้เป็นเครื่องหมายลบ (-)

สำหรับการสร้างรูปที่ 2ก โดยสมการที่ (13) กระทำได้ดังนี้คือ กำหนดให้ค่าเปลี่ยนแปลงของ x เป็น Δx และมีค่าเท่ากับ 0.2 โดยเปลี่ยนค่าจาก 0 ถึง 15 แล้วหาค่า H ที่ทำให้ y มีค่าเช่นเดียวกับ x กล่าวคือ $0 \leq y \leq 15$ ($\Delta y = 1$ เพื่อการสร้างรูป) ซึ่งจากรูปจะเห็นว่าเส้นจะเริ่มต้นที่ค่า y ดังกล่าว โดยที่จุด $P(0, 15)$ นั้น $H = 15$ ในขณะที่จุด $P(0, 0)$ นั้น $H \rightarrow \infty$

รูปที่ 2ข ซึ่งแสดงแนววิถีความเค้นหลัก σ_2 นั้น สามารถหาได้โดยวิธีเดียวกันกับรูปที่ 2ก กล่าวคือ สมการที่ (12) สามารถเขียน

ก



รูปที่ 2 สนามแนววิถีความเค้นหลักบนจตุภาคที่ 1 ของตัวแบบในรูปที่ 1 (ก) แนววิถีความเค้นหลัก σ_1 และ (ข) แนววิถีความเค้นหลัก σ_2

ได้ใหม่ว่า

$$y = \pm \sqrt{V^2 + R^2 - (x - V)^2} \quad (14)$$

โดยที่เครื่องหมายที่ใช้เป็นเครื่องหมายบวก (+) จากสมการที่ (14) จะเห็นได้ว่า $0 \leq V \leq -\infty$ สำหรับการสร้างรูปนั้นจะกำหนดให้ $\Delta x = 1$ จากรูปจะเห็นได้ว่า ในทุกๆค่าของ V จุด $P(0, 15)$ จะเป็นจุดร่วมเสมอซึ่งแสดงถึงจุดที่แรงข้มกต F กระทำต่อตัวแบบ

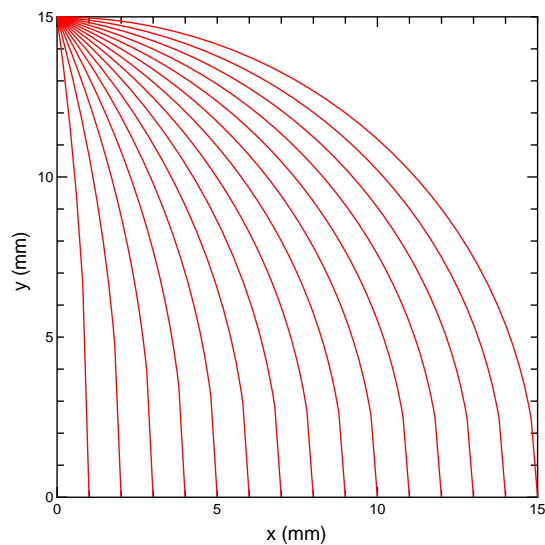
รูปที่ 3 แสดงสนามแนววิถีความเค้นหลักทั้งสองซึ่งเกิดจากการซ้อนทับกันระหว่างรูปที่ 2ก และ 2ข จากรูปจะเห็นได้ว่ามุมที่เกิดการตัดกันระหว่างแนววิถีความเค้นหลักทั้งสองจะมีค่าเท่ากับ 90° นอกจากนี้เนื่องจากว่าปัญหานี้เป็นปัญหาที่มีความสมมาตร ดังนั้นอีกสามจตุภาคที่เหลือก็จะมีลักษณะของสนามแนววิถีความเค้นหลักเหมือนกันต่างกันเพียงแต่ว่าต้องมีการพลิกกลับด้านของสนามแนววิถีความเค้นซึ่งในท้ายที่สุดก็จะได้สนามแนววิถีความเค้นทั่วทั้งตัวแบบ สำหรับรูปที่ 3 นั้นมีความสอดคล้องกับสนามแนววิถีความเค้นหลักที่ได้รายงานไว้ในเอกสารอ้างอิงหมายเลข [8] ซึ่งได้จากวิธีการวาดด้วยมือ

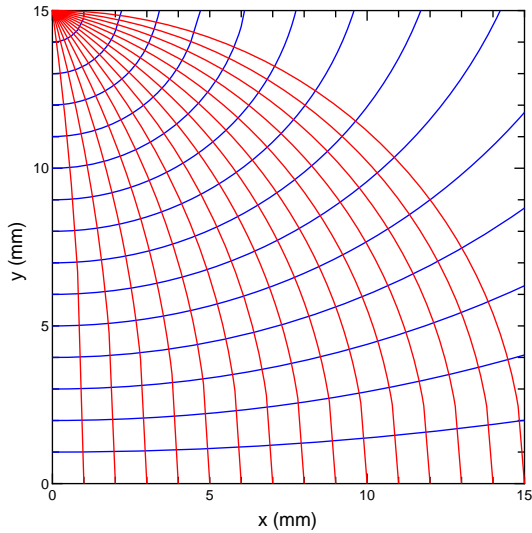
5.2 ผลลัพธ์จากการประยุกต์วิธีไฟโอดีลาสติคซิติเชิงเลขกับภาพวิวัฒนาการความเค้นจำลอง

รูปที่ 4 แสดงสนามทิศทางของความเค้นหลักในย่านเต็มรูปพร้อมด้วยเส้นตรงสั้นซึ่งมีความชันเท่ากับค่าของ ϕ_p ณ จุดนั้นๆ รูปที่ 4ก เป็นสนามแนววิถีความเค้นหลัก σ_1 ในขณะที่รูปที่ 4ข เป็นสนามความเค้นหลัก σ_2 ส่วนรูปที่ 4ค นั้นเกิดจากการรวมกันของรูปที่ 4ก และ 4ข

ในรูปที่ 4ก นั้นหากพิจารณาเฉพาะจตุภาคที่ 1 แล้วจะเห็นว่ามีลักษณะคล้ายกับรูปที่ 2ก ต่างกันเพียงแต่ว่ารูปที่ 4ก ไม่มีเส้นทึบที่ต่อเนื่องกัน อย่างไรก็ตามหากกำหนดช่องว่างระหว่างจุดให้มีค่าน้อยลงก็สามารถที่จะลากเส้นทึบได้ ในลักษณะเดียวกัน

ข



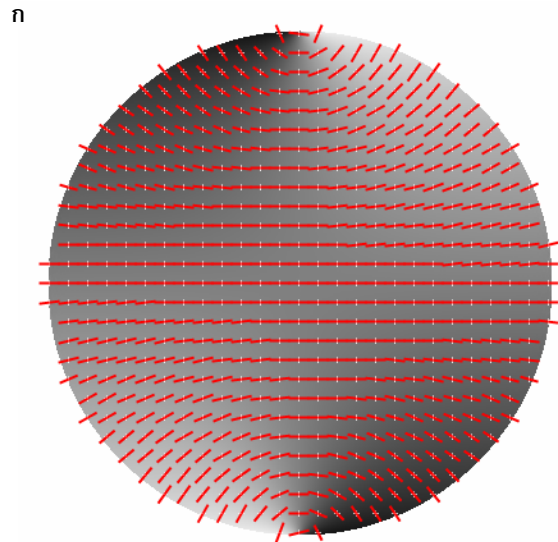


รูปที่ 3 สนามแนววิถีความเค้นหลัก σ_1 และ σ_2

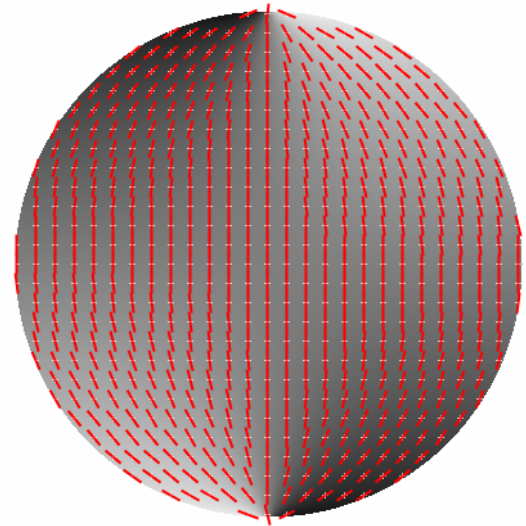
รูปที่ 4ข แสดงแนววิถีความเค้นหลัก σ_2 ซึ่งจะเห็นได้ว่าแนวเส้นจะเริ่มจากจุดที่แรงกระทำด้านบนและไปจบที่จุดรองรับทางด้านล่าง หากพิจารณาสมการที่ (14) จะพบว่า ถ้ากำหนดให้ $V = 0$ ค่าของตัวแปร y ก็คือค่าที่ขอบของตัวแบบ ดังนั้นขอบของตัวแบบก็เป็นแนววิถีความเค้นหลักด้วยเช่นกัน ซึ่งหากพิจารณาบริเวณขอบรูปที่ 4ข แล้วก็จะพบว่าแนวเส้นตรงสั้นก็จะขนานไปกับขอบของตัวแบบ ณ จุดนั้นๆ

เนื่องจากว่าโดยทั่วไปมักจะกำหนดให้ $\sigma_1 \geq \sigma_2$ ดังนั้นการที่ระบุว่ารูปที่ 4ข เป็นสนามแนววิถีความเค้นหลัก σ_2 จึงเป็นเรื่องที่ต้อง บริเวณตรงกลางของตัวแบบแนววิถีความเค้นหลักจะมีลักษณะเป็นเส้นตรงที่ลากจากจุดที่แรงกระทำลงมายังจุดรองรับ ดังนั้น ในส่วนบริเวณตรงกลางของตัวแบบจะรับความเค้นอัดสูงมากที่สุดเมื่อเทียบกับแนวอื่น ๆ นอกจากนี้ตัวแบบจะรับความเค้นอัดสูงกว่าความเค้นดึง (เปรียบเทียบกับรูปที่ 4ก)

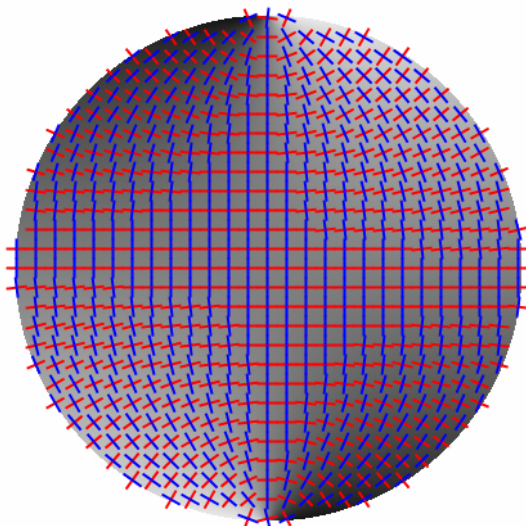
รูปที่ 4ค แสดงสนามแนววิถีความเค้นหลักทั้ง σ_1 และ σ_2 พิจารณาเส้นตรงสั้นทั้งสอง ณ จุดใดจุดหนึ่งในตัวแบบ จะเห็นได้ว่าเส้นตรงสั้นทั้งสองจะตั้งฉากซึ่งกันและกัน นอกจากนี้หากสังเกตอย่างละเอียดแล้วจะพบว่า ลักษณะของสนามแนววิถีความเค้นหลักมีลักษณะที่ไม่สมมาตร ซึ่งในทางทฤษฎีจะต้องมีความสมมาตรกัน สาเหตุที่เป็นเช่นนี้ก็เนื่องมาจากว่า ในการแสดงแผนภาพไอโซคลินิกหรือแผนภาพทิศทางความเค้นหลักจะต้องแสดงออกมาเป็นภาพซึ่งจุดภาพแต่ละจุดมีค่าเป็นจำนวนเต็มบวกในขณะที่ค่าจริงของตัวแปรไอโซคลินิกที่คำนวณหามาได้นั้นจะมีค่าเป็นจำนวนจริง ดังนั้นการแปลงค่าไปมาระหว่างค่าจริงกับค่าจุดภาพอาจทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนไปบ้าง ซึ่งค่าความคลาดเคลื่อนนี้ส่งผลมายังสนามแนววิถีความเค้นหลัก อย่างไรก็ตามหากเปรียบเทียบกันแล้วจะพบว่าวิธีไฟโตอิสติกซีตีเชิงเลขจะให้ภาพสนามแนววิถีความเค้นหลักได้รวดเร็วกว่าวิธีเชิงวิเคราะห์



ก

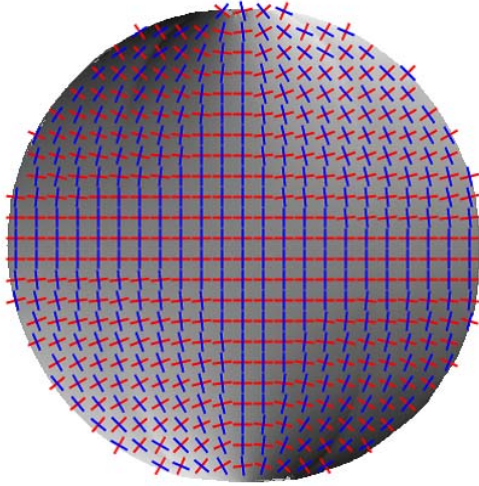


ข

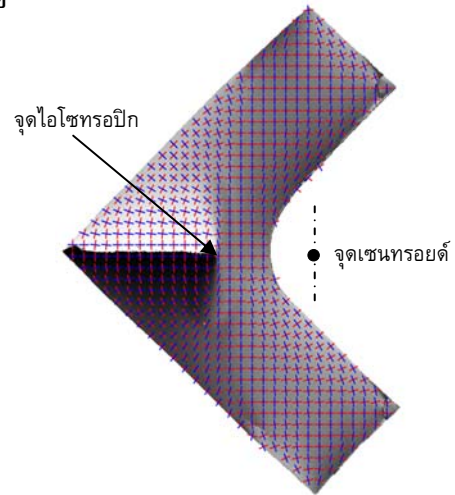


รูปที่ 4 สนามแนววิถีความเค้นหลักแสดงด้วยเส้นตรงสั้นซึ่งวาดทับบนแผนภาพทิศทางความเค้นหลัก ϕ_p ในย่าน -90° ถึง $+90^\circ$ (ก) แนววิถีความเค้นหลัก σ_1 (ข) แนววิถีความเค้นหลัก σ_2 และ (ค) แนววิถีความเค้นหลักทั้งสองที่ซ้อนทับกัน

ก



ข



รูปที่ 5 สนามแนววิถีความเค้นหลัก σ_1 และ σ_2 ที่ได้จากการใช้วิธีสนามความเค้นจริงของตัวแบบ (ก) ผ่านจานกลมรับแรงข้มกดในแนวเส้นผ่านศูนย์กลาง และ (ข) โครงหักมุมรับแรงข้มกดผ่านจุดเซนทรอยด์

5.3 ผลลัพธ์จากการประยุกต์วิธีโพโตอีลาสติคิตีเชิงเลขกับภาพริ้วสนามความเค้นจริง

รูปที่ 5ก แสดงสนามแนววิถีความเค้นหลักเช่นเดียวกับรูปที่ 4ค อย่างไรก็ตามสนามทิศทางความเค้นหลักนั้นได้มาจากการประยุกต์ใช้กระบวนการคืนรูปเฟสกับริ้วสนามความเค้นที่ได้จากการทดลอง [7] จากการเปรียบเทียบกับรูปที่ 4ค จะพบว่าลักษณะของแนววิถีความเค้นหลักมีความเหมือนกัน

รูปที่ 5ข แสดงสนามแนววิถีความเค้นหลักของโครงหักมุมรับแรงข้มกดผ่านจุดเซนทรอยด์ ซึ่งหาได้โดยใช้กระบวนการคืนรูปเฟส [7] ปัญหาหลักของตัวแบบนี้ก็คือการมีจุดไอโซทรอปิก จุดนี้แนววิถีความเค้นหลักทั้งสองจะมีลักษณะเป็นเส้นโค้งล้อมรอบโดยที่จุดไอโซทรอปิกเป็นจุดศูนย์กลาง ลักษณะเช่นนี้แสดงให้เห็นว่า จุดไอโซทรอปิกดังกล่าวเป็นจุดไอโซทรอปิกบวกลบ ซึ่งสังเกตว่าสำหรับตัวแบบนี้จะไม่แสดงผลเฉยแม่นยำตรงหรือสมการองค์ประกอบความเค้น σ_{xx} , σ_{yy} และ τ_{xy} ดังนั้นจึงไม่สามารถหาแนววิถีความเค้นหลักได้โดยสมการที่ (5) หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือไม่สามารถหาแนววิถีความเค้นหลักได้ด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ แม้ว่า การหาแนววิถีความเค้นหลักจะสามารถกระทำได้ง่ายด้วยวิธีการเชิงตัวเลข [1] แต่ปัญหาที่สำคัญสำหรับวิธีการเชิงตัวเลขก็คือการมีจุดไอโซทรอปิกในสนามริ้วความเค้นนั่นเอง

6. สรุปผล

บทความฉบับนี้นำเสนอวิธีการหาสนามแนววิถีความเค้นหลักของ σ_1 และ σ_2 ซึ่งมีความสำคัญต่อวิธีการ โดยวิธีเชิงวิเคราะห์และวิธีโพโตอีลาสติคิตีเชิงเลข ผลจากการใช้สมการแนววิถีความเค้นหลักเชิงทฤษฎีของตัวแบบแผ่นจานกลมรับแรงกดในแนวเส้นผ่านศูนย์กลางนั้นแสดงให้เห็นว่าแนววิถีความเค้นของ σ_1 และ σ_2 มีทิศทางที่ตั้งฉากซึ่งกันและกันและสนามแนววิถีความเค้นหลักที่ได้มาจากริ้วความเค้นจริง มีความสอดคล้องกับสนามแนววิถี

ความเค้นทางทฤษฎี นอกจากนี้ผลจากการหาแนววิถีความเค้นหลักของตัวแบบโครงหักมุมรับแรงข้มกดผ่านจุดเซนทรอยด์ แสดงให้เห็นว่าวิธีโพโตอีลาสติคิตีเชิงเลขสามารถหาแนววิถีความเค้นหลักได้โดยง่ายเช่นกันสำหรับริ้วสนามความเค้นที่มีจุดไอโซทรอปิก

เอกสารอ้างอิง

- [1] Kelly, D.W. and Tosh, M.W. 2000. Interpreting Load Paths and Stress Trajectories in Elasticity. Engineering Computation, 17: 117-135.
- [2] Frocht, M.M. 1941. Photoelasticity, Vol. I, John Wiley & Sons, New York, U.S.A.
- [3] Ramesh, K. 2000. Digital Photoelasticity: Advanced Technique and Applications. Springer, Berlin Germany.
- [4] Molleda, F., Mora, J., Molleda, F.J., Carrillo, E., and Mellor, B.G. 2005. Stress trajectories for mode I fracture. Materials Characterization, 54: 9-12.
- [5] Frocht, M.M. 1948. Photoelasticity, Vol. II, John Wiley & Sons, New York, U.S.A.
- [6] ญัฐวัฒน์ พลอยทับทิม และ พิเชษฐ์ พินิจ. 2551. การพัฒนาวิธีการคืนรูปไอโซคลินิกบนพื้นฐานการใช้ฟังก์ชันแทนเจนต์ ผกผันแบบสี่จุดภาค: การทดสอบกับริ้วจำลอง. การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 22, กรุงเทพฯ, ประเทศไทย, 15-17 ตุลาคม 2551: 42-46.
- [7] Pinit, P. and Umezaki, E. 2007. Digitally Whole-field Analysis of Isoclinic Parameter in Photoelasticity by Four-step Color Phase-shifting Technique. Optics and Laser in Engineering, 45: 795-807.
- [8] Budynas, R.G. 1999. Advanced Strength and Applied Stress Analysis. McGraw-Hill, Singapore.