Deformation

5 การเปลี่ยนรูป

พิเชษฐ์ พินิจ

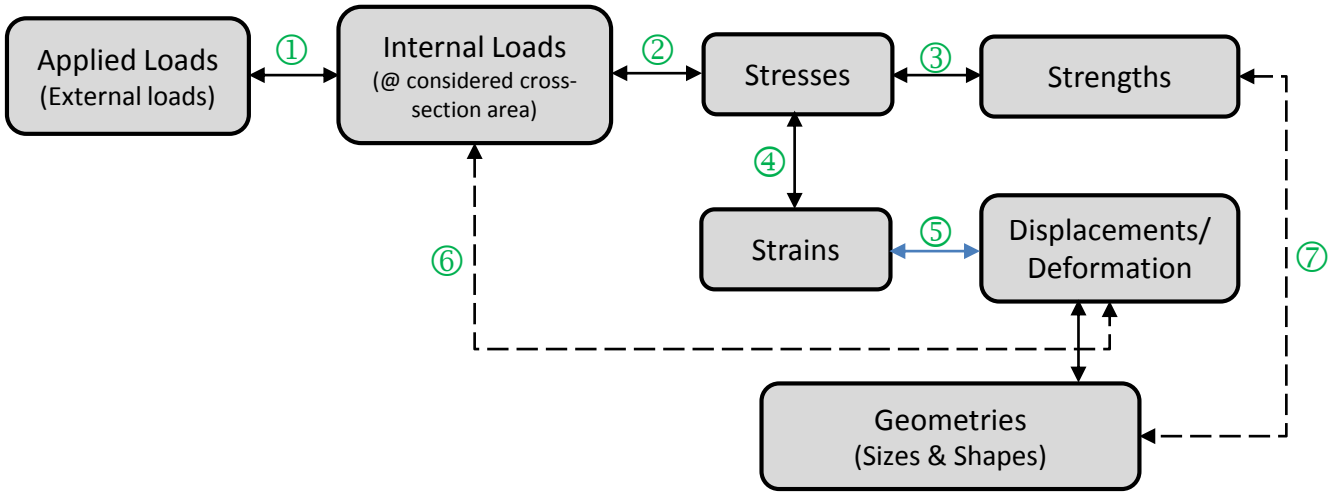
คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมและเทคโนโลยี | มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี
Faculty of Industrial Education and Technology
KMUTT

ทบทวนความเข้าใจจาก 1

Reviewing for understanding

แนวคิดรวบยอด

“ความสัมพันธ์เชิงตรรกะในกลศาสตร์วัสดุ”



⑥ สัมประสิทธิ์ความแกร่งเชิงเส้นและเชิงมุม (stiffness and rigidity)

*เลขเหล่านี้**มิได้**หมายถึงลำดับ บอกเพียงตำแหน่งที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างคู่ปริมาณทางฟิสิกส์เท่านั้น

*เส้นประ หมายถึง ความสัมพันธ์คู่นั้นไม่สามารถแสดงได้ หากปราศจากความสัมพันธ์ที่แสดงด้วยเส้นทึบ

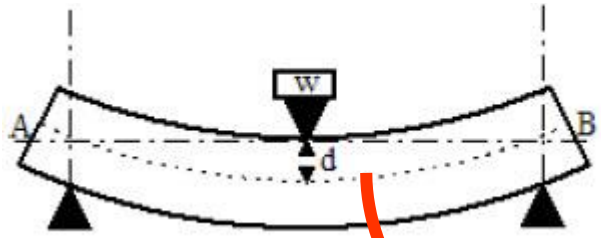
*ความสัมพันธ์เชิงตรรกะจะถูกใช้เป็นแนวทางในการพิสูจน์สูตรหรือสมการความเค้นพื้นฐาน

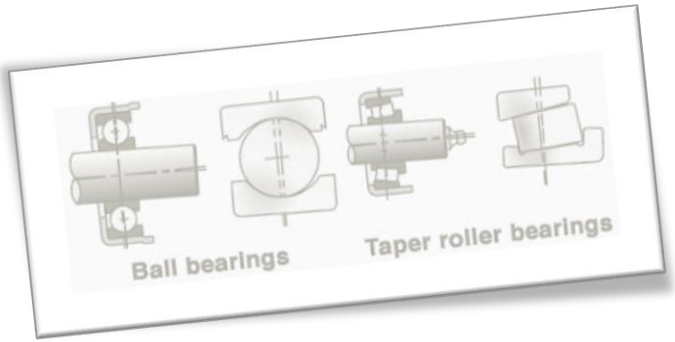
แนวคิดรวบยอด

“การออกแบบชิ้นส่วนทางกล-ความแกร่ง”

อาศัยฟังก์ชันการเปลี่ยนรูปเพื่อเปรียบเทียบขนาดของ
การเปลี่ยนรูป Δ ที่ได้จากการคำนวณกับการเปลี่ยนรูปที่ยอมให้ Δ_{allow}

$$f(\Delta, \Delta_{\text{allow}})$$
(deformation function)





การออกแบบเพื่อความแกร่ง
(Design for stiffness)

แนวคิดรวบยอด

“การออกแบบชิ้นส่วนทางกล-ความแกร่ง”

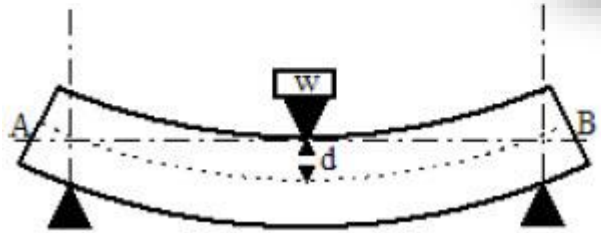
อาศัยฟังก์ชันการเปลี่ยนรูปเพื่อเปรียบเทียบขนาดของ
การเปลี่ยนรูป Δ ที่ได้จากการคำนวณกับการเปลี่ยนรูปที่ยอมให้ Δ_{allow}

$$f(\Delta, \Delta_{\text{allow}})$$

กำหนดโดยการเปลี่ยนรูปที่ยอมให้จากชิ้นส่วนเครื่องกลอื่น ๆ
เช่น รองลื่น (bearing) และเฟือง (gear)

$$\Delta = \begin{cases} \delta_{\vdash} & \text{การยืด/หดในแนวแกน (axial deformation)} \\ \delta_{\perp}, \theta & \text{การโก่งในแนวขวาง (transverse deformation) และการเปลี่ยนรูปเชิงมุม (slope)} \\ \phi & \text{การเปลี่ยนรูปเชิงมุม (torsional deformation)} \end{cases}$$

Slopes	
Tapered roller	0.0005–0.0012 rad
Cylindrical roller	0.0008–0.0012 rad
Deep-groove ball	0.001–0.003 rad
Spherical ball	0.026–0.052 rad
Self-align ball	0.026–0.052 rad
Uncrowned spur gear	<0.0005 rad
Transverse Deflections	
Spur gears with $P < 10$ teeth/in	0.010 in
Spur gears with $11 < P < 19$	0.005 in
Spur gears with $20 < P < 50$	0.003 in



แนวคิดรวบยอด

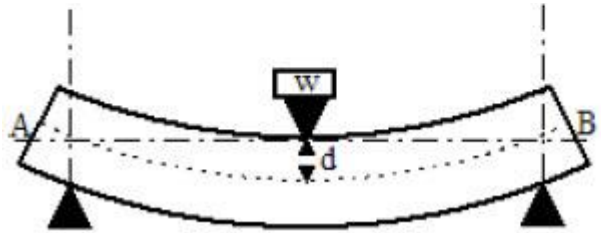
“การออกแบบชิ้นส่วนทางกล-ความแกร่ง”

อาศัยฟังก์ชันการเปลี่ยนรูปเพื่อเปรียบเทียบขนาดของการเปลี่ยนรูป Δ ที่ได้จากการคำนวณกับการเปลี่ยนรูปที่ยอมให้ Δ_{allow}

$f(\Delta, \Delta_{\text{allow}})$ ความเสียหายจะเกิดขึ้นเมื่อ $\Delta > \Delta_{\text{allow}}$

$$\delta_{\vdash}, \delta_{\perp}, \theta, \phi = \frac{Load \cdot f(L)}{\text{Constant} \cdot Rigidity}$$

สมบัติของวัสดุที่**ขึ้นอยู่กับปริมาณของวัสดุ**นั้น (extensive properties) และแสดงถึงความต้านทานการเปลี่ยนรูปของวัสดุนั้นภายใต้การกระทำของภาระภายนอก ซึ่ง**ในที่นี้จะขึ้นอยู่กับสมบัติทางกลของวัสดุ และหน้าตัดของวัสดุ**



Elasticity

สมบัติของวัสดุที่**ไม่ขึ้นอยู่กับปริมาณของวัสดุนั้น** (intensive properties) และแสดงถึงความต้านทานในการเปลี่ยนรูปของวัสดุนั้นภายใต้การกระทำของภาระภายนอก

การเปลี่ยนรูป

Deformation

แนวคิดรวบยอด

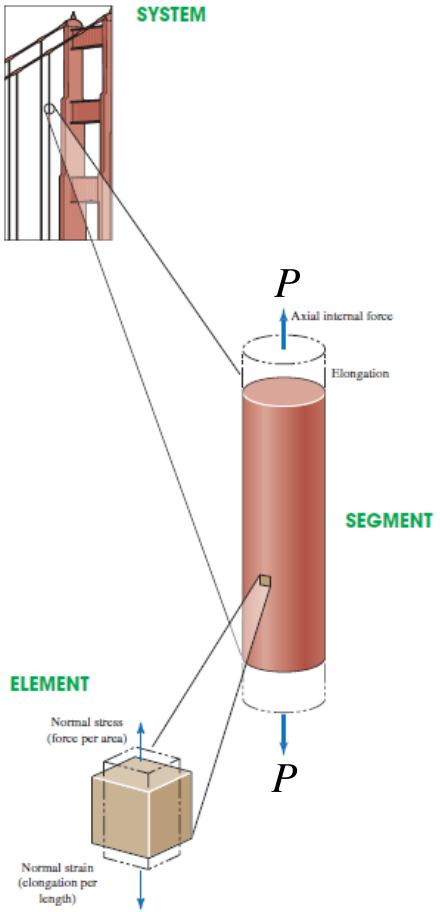
“การออกแบบชิ้นส่วนทางกล-การเปลี่ยนรูปแนวแกน”

อาศัยฟังก์ชันการเปลี่ยนรูปเพื่อเปรียบเทียบขนาดของ
การเปลี่ยนรูป Δ ที่ได้จากการคำนวณกับการเปลี่ยนรูปที่ยอมให้ Δ_{allow}

$$\delta_{\vdash}, \delta_{\perp}, \theta, \phi = \frac{Load \cdot f(L)}{\text{Constant} \cdot Rigidity}$$

$$\delta_{\vdash} = \frac{PL}{EA}$$

axial rigidity



Source: Paul, S. S. (2012). **Mechanics of materials**. New Jersey: Pearson Higher Education.

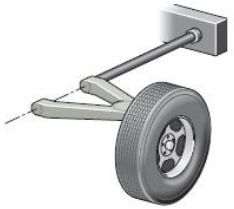
แนวคิดรวบยอด

“การออกแบบชิ้นส่วนทางกล-การเปลี่ยนรูปเชิงมุม”

อาศัยฟังก์ชันการเปลี่ยนรูปเพื่อเปรียบเทียบขนาดของ

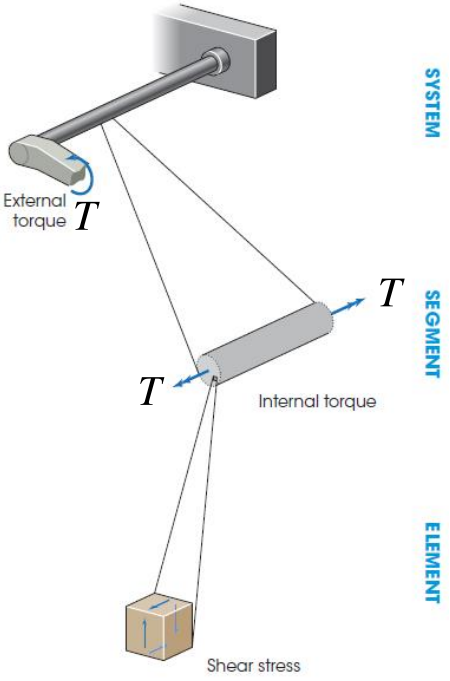
การเปลี่ยนรูป Δ ที่ได้จากการคำนวณกับการเปลี่ยนรูปที่ยอมให้ Δ_{allow}

$$\delta_{\vdash}, \delta_{\perp}, \theta, \phi = \frac{Load \cdot f(L)}{\text{Constant} \cdot Rigidity}$$



$$\phi = \frac{TL}{GJ}$$

torsional rigidity



Source: Paul, S. S. (2012). **Mechanics of materials**. New Jersey: Pearson Higher Education.

แนวคิดรวบยอด

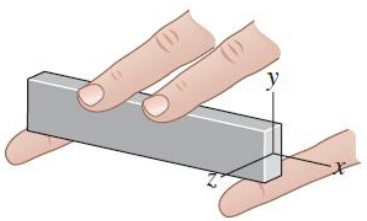
“การออกแบบชิ้นส่วนทางกล-การเปลี่ยนรูปแนวขวาง”

อาศัยฟังก์ชันการเปลี่ยนรูปเพื่อเปรียบเทียบขนาดของ
การเปลี่ยนรูป Δ ที่ได้จากการคำนวณกับการเปลี่ยนรูปที่ยอมให้ Δ_{allow}

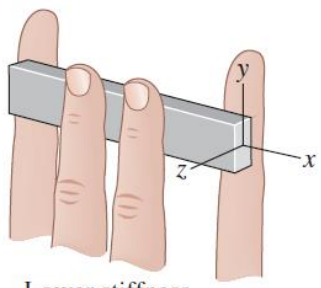
$$\delta_{\vdash}, \delta_{\perp}, \theta, \phi = \frac{Load \cdot f(L)}{\text{Constant} \cdot Rigidity}$$

$$\delta_{\perp}, \theta = \frac{Load \cdot f(L)}{\text{Constant} \cdot EI}$$

flexural rigidity



Higher stiffness



Lower stiffness

$I_z > I_y$

Source: Paul, S. S. (2012). **Mechanics of materials**. New Jersey: Pearson Higher Education.

แนวคิดรวบยอด

“การออกแบบชิ้นส่วนทางกล-การเปลี่ยนรูปแนวขวาง”

Simply-supported Beams

$$\delta_{\perp}, \theta = \frac{Load \cdot f(L)}{\text{Constant} \cdot EI}$$

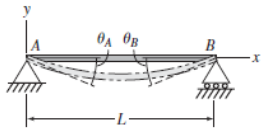
flexural rigidity

Distributed force - q,

concentrated force - P, and

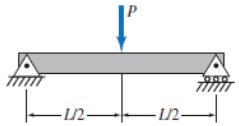
bending moment M_0

G-2 Deflections and Slopes of Simply Supported Beams



v = deflection in the y direction (positive upward)
$v' = dv/dx$ = slope of the deflection curve
$\delta_C = -v(L/2)$ = deflection at midpoint of the beam (positive downward)
x_1 = distance from support A to point of maximum deflection
$\delta_{max} = -v_{max}$ = maximum deflection (positive downward)
$\theta_A = -v'(0)$ = angle of rotation at left-hand end of the beam (positive clockwise)
$\theta_B = v'(L)$ = angle of rotation at right-hand end of the beam (positive counterclockwise)
EI = constant

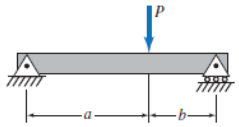
G-2.1



$$v = -\frac{Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2) \qquad v' = -\frac{P}{16EI}(L^2 - 4x^2) \qquad \left(0 \le x \le \frac{L}{2}\right)$$

$$\delta_C = \delta_{max} = \frac{PL^3}{48EI} \qquad \theta_A = \theta_B = \frac{PL^2}{16EI}$$

G-2.2



$$v = -\frac{Pbx}{6LEI}(L^2 - b^2 - x^2) \qquad v' = -\frac{Pb}{6LEI}(L^2 - b^2 - 3x^2) \qquad (0 \le x \le a)$$

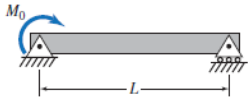
$$\theta_A = \frac{Pab(L+b)}{6LEI} \qquad \theta_B = \frac{Pab(L+a)}{6LEI}$$

If $a \ge b$, $\delta_C = \frac{Pb(3L^2 - 4b^2)}{48EI}$ If $a \le b$, $\delta_C = \frac{Pa(3L^2 - 4a^2)}{48EI}$

If $a \ge b$, $x_1 = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}$ and $\delta_{max} = \frac{Pb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}LEI}$

If $a < b$, $x_1 = L - \sqrt{\frac{L^2 - a^2}{3}}$ and $\delta_{max} = \frac{Pa(L^2 - a^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}LEI}$

G-2.3



$$v = -\frac{M_0 x}{6LEI}(2L^2 - 3Lx + x^2) \qquad v' = -\frac{M_0}{6LEI}(2L^2 - 6Lx + 3x^2)$$

$$\delta_C = \frac{M_0 L^2}{16EI} \qquad \theta_A = \frac{M_0 L}{3EI} \qquad \theta_B = \frac{M_0 L}{6EI}$$

$$x_1 = L\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \text{and} \quad \delta_{max} = \frac{M_0 L^2}{9\sqrt{3}EI}$$

Source: Paul, S. S. (2012). **Mechanics of materials**. New Jersey: Pearson Higher Education.

แนวคิดรวบยอด

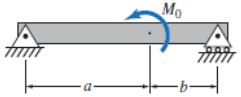
“การออกแบบชิ้นส่วนทางกล-การเปลี่ยนรูปแนวขวาง”

Simply-supported Beams

$$\delta_{\perp}, \theta = \frac{Load \cdot f(L)}{\text{Constant} \cdot EI}$$

flexural rigidity

G-2.5



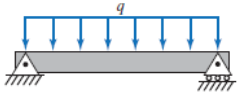
$$v = -\frac{M_0 x}{6LEI}(6aL - 3a^2 - 2L^2 - x^2) \qquad (0 \le x \le a)$$

$$v' = -\frac{M_0}{6LEI}(6aL - 3a^2 - 2L^2 - 3x^2) \qquad (0 \le x \le a)$$

At $x = a$: $\quad v = -\frac{M_0 ab}{3LEI}(2a - L) \qquad v' = -\frac{M_0}{3LEI}(3aL - 3a^2 - L^2)$

$$\theta_A = \frac{M_0}{6LEI}(6aL - 3a^2 - 2L^2) \qquad \theta_B = \frac{M_0}{6LEI}(3a^2 - L^2)$$

G-2.6

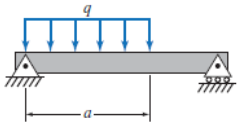


$$v = -\frac{qx}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$$

$$v' = -\frac{q}{24EI}(L^3 - 6Lx^2 - 4x^3)$$

$$\delta_C = \delta_{\max} = \frac{5qL^4}{384EI} \qquad \theta_A = \theta_B = \frac{qL^3}{24EI}$$

G-2.7



$$v = -\frac{qx}{24LEI}(a^4 - 4a^3L + 4a^2L^2 + 2a^2x^2 - 4aLx^2 + Lx^3) \qquad (0 \le x \le a)$$

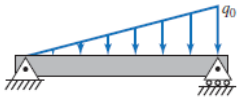
$$v' = -\frac{q}{24LEI}(a^4 - 4a^3L + 4a^2L^2 + 6a^2x^2 - 12aLx^2 + 4Lx^3) \qquad (0 \le x \le a)$$

$$v = -\frac{qa^2}{24LEI}(-a^2L + 4L^2x + a^2x - 6Lx^2 + 2x^3) \qquad (a \le x \le L)$$

$$v' = -\frac{qa^2}{24LEI}(4L^2 + a^2 - 12Lx + 6x^2) \qquad (a \le x \le L)$$

$$\theta_A = \frac{qa^2}{24LEI}(2L - a)^2 \qquad \theta_B = \frac{qa^2}{24LEI}(2L^2 - a^2)$$

G-2.8



$$v = -\frac{q_0 x}{360LEI}(7L^4 - 10L^2x^2 + 3x^4)$$

$$v' = -\frac{q_0}{360LEI}(7L^4 - 30L^2x^2 + 15x^4)$$

$$\delta_C = \frac{5q_0L^4}{768EI} \qquad \theta_A = \frac{7q_0L^3}{360EI} \qquad \theta_B = \frac{q_0L^3}{45EI}$$

$$x_1 = 0.5193L \qquad \delta_{\max} = 0.00652\frac{q_0L^4}{EI}$$

Source: Paul, S. S. (2012). **Mechanics of materials**. New Jersey: Pearson Higher Education.

แนวคิดรวบยอด

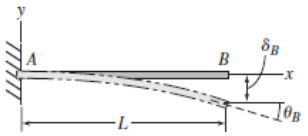
“การออกแบบชิ้นส่วนทางกล-การเปลี่ยนรูปแนวขวาง”

Cantilever Beams

$$\delta_{\perp}, \theta = \frac{Load \cdot f(L)}{\text{Constant} \cdot EI}$$

flexural rigidity

G-1 Deflections and Slopes of Cantilever Beams



v = deflection in the y direction (positive upward)
$v' = dv/dx$ = slope of the deflection curve
$\delta_B = -v(L)$ = deflection at end B of the beam (positive downward)
$\theta_B = -v'(L)$ = angle of rotation at end B of the beam (positive clockwise)
EI = constant

G-1.1

$$v = -\frac{Px^2}{6EI}(3L - x) \qquad v' = -\frac{Px}{2EI}(2L - x)$$

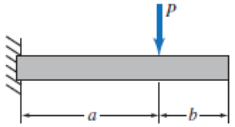
$$\delta_B = \frac{PL^3}{3EI} \qquad \theta_B = \frac{PL^2}{2EI}$$

G-1.2

$$v = -\frac{M_0x^2}{2EI} \qquad v' = -\frac{M_0x}{EI}$$

$$\delta_B = \frac{M_0L^2}{2EI} \qquad \theta_B = \frac{M_0L}{EI}$$

G-1.3



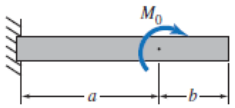
$$v = -\frac{Px^2}{6EI}(3a - x) \qquad v' = -\frac{Px}{2EI}(2a - x) \qquad (0 \le x \le a)$$

$$v = -\frac{Pa^2}{6EI}(3x - a) \qquad v' = -\frac{Pa^2}{2EI} \qquad (a \le x \le L)$$

$$\text{At } x = a: \qquad v = -\frac{Pa^3}{3EI} \qquad v' = -\frac{Pa^2}{2EI}$$

$$\delta_B = \frac{Pa^2}{6EI}(3L - a) \qquad \theta_B = \frac{Pa^2}{2EI}$$

G-1.4



$$v = -\frac{M_0x^2}{2EI} \qquad v' = -\frac{M_0x}{EI} \qquad (0 \le x \le a)$$

$$v = -\frac{M_0a}{2EI}(2x - a) \qquad v' = -\frac{M_0a}{EI} \qquad (a \le x \le L)$$

$$\text{At } x = a: \qquad v = -\frac{M_0a^2}{2EI} \qquad v' = -\frac{M_0a}{EI}$$

$$\delta_B = \frac{M_0a}{2EI}(2L - a) \qquad \theta_B = \frac{M_0a}{EI}$$

Source: Paul, S. S. (2012). **Mechanics of materials**. New Jersey: Pearson Higher Education.

แนวคิดรวบยอด

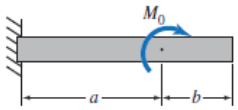
“การออกแบบชิ้นส่วนทางกล-การเปลี่ยนรูปแนวขวาง”

Cantilever Beams

$$\delta_{\perp}, \theta = \frac{Load \cdot f(L)}{\text{Constant} \cdot EI}$$

flexural rigidity

G-1.4



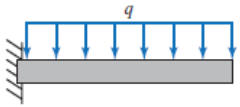
$$v = -\frac{M_0 x^2}{2EI} \qquad v' = -\frac{M_0 x}{EI} \qquad (0 \le x \le a)$$

$$v = -\frac{M_0 a}{2EI}(2x - a) \qquad v' = -\frac{M_0 a}{EI} \qquad (a \le x \le L)$$

$$\text{At } x = a: \qquad v = -\frac{M_0 a^2}{2EI} \qquad v' = -\frac{M_0 a}{EI}$$

$$\delta_B = \frac{M_0 a}{2EI}(2L - a) \qquad \theta_B = \frac{M_0 a}{EI}$$

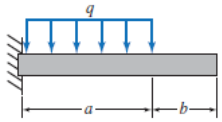
G-1.5



$$v = -\frac{qx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2) \qquad v' = -\frac{qx}{6EI}(3L^2 - 3Lx + x^2)$$

$$\delta_B = \frac{qL^4}{8EI} \qquad \theta_B = \frac{qL^3}{6EI}$$

G-1.6



$$v = -\frac{qx^2}{24EI}(6a^2 - 4ax + x^2) \qquad (0 \le x \le a)$$

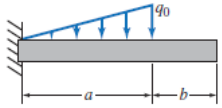
$$v' = -\frac{qx}{6EI}(3a^2 - 3ax + x^2) \qquad (0 \le x \le a)$$

$$v = -\frac{qa^3}{24EI}(4x - a) \qquad v' = -\frac{qa^3}{6EI} \qquad (a \le x \le L)$$

$$\text{At } x = a: \qquad v = -\frac{qa^4}{8EI} \qquad v' = -\frac{qa^3}{6EI}$$

$$\delta_B = \frac{qa^3}{24EI}(4L - a) \qquad \theta_B = \frac{qa^3}{6EI}$$

G-1.7



$$v(x) = \frac{q_0 x^2}{120EI}[10ax - 20a^2 - x^3/a] \qquad (0 < x < a)$$

$$v'(x) = \frac{q_0 x}{24EI}[6ax - 8a^2 - x^3/a] \qquad (0 < x < a)$$

$$v(x) = \frac{-q_0 a^3}{120EI}\left[\frac{11}{120}a + \frac{1}{8}(x - a)\right] \qquad v'(x) = \frac{-q_0 a^3}{8EI} \qquad (a < x < L)$$

$$\text{At } x = a: \qquad v = \frac{-11 q_0 a^4}{120EI} \qquad v' = \frac{-q_0 a^3}{8EI}$$

$$\delta_B = \frac{q_0 a^3}{EI}\left[\frac{11}{120}a + \frac{1}{8}(L - a)\right] \qquad \theta_B = \frac{q_0 a^3}{8EI}$$

Source: Paul, S. S. (2012). **Mechanics of materials**. New Jersey: Pearson Higher Education.

จบ