การออกแบบเครื่องจักรกลเกษตร

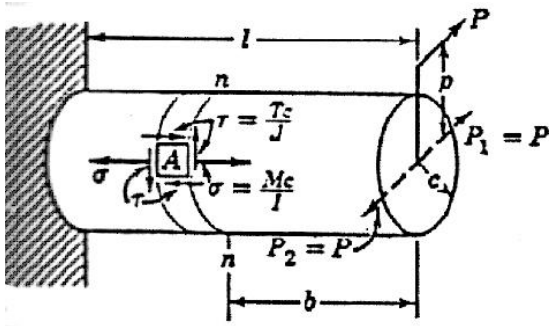
421312

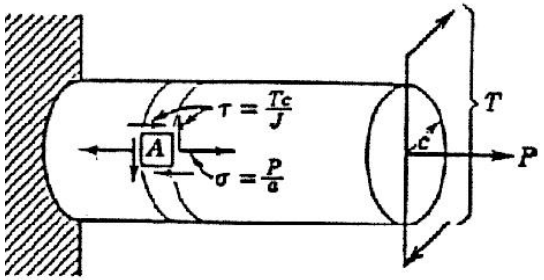
ความเค้นผสมและทฤษฎีความเสียหาย

- ความเค้นผสม
- ทฤษฎีความเค้นหลักสูงสุด
- ทฤษฎีความเค้นเฉือนสูงสุด
- ทฤษฎีความเค้นเฉือนออคตะฮีดรัล

ความเค้นผสม

โดยทั่วไป ชิ้นงานจะเกิดความเค้นมากกว่า 1 ชนิดพร้อมกัน เช่น





$$\sigma = \frac{Mc}{I} \qquad \tau = \frac{Tr}{J}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \qquad \tau = \frac{Tr}{J}$$

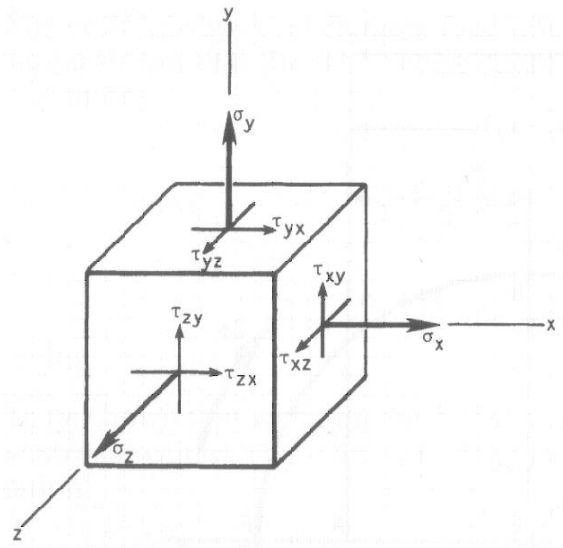
<u>การออกแบบชิ้นงาน</u>

- ต้องรวมความเค้นที่เกิดขึ้นเข้าด้วยกัน เรียกว่า ความเค้นผสม (combined stress)
- ต้องหาค่าความเค้นสูงสุด (ทั้ง max. & min. σ max. τ) ที่เกิดบนชิ้นส่วน เพื่อใช้หาขนาดชิ้นงาน

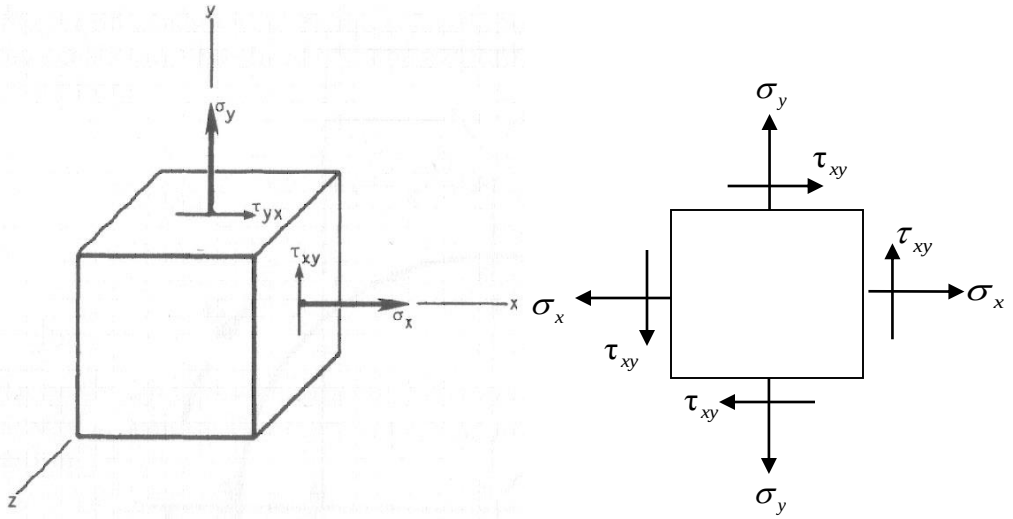
ความเค้นผสม

การหาความเค้นสูงสุดในชิ้นงาน

ระบบของความเค้น - สามารถพิจารณาให้ปัญหาทางวิศวกรรมจากระบบความเค้น 3 มิติ เป็นระบบ 2 มิติ ได้

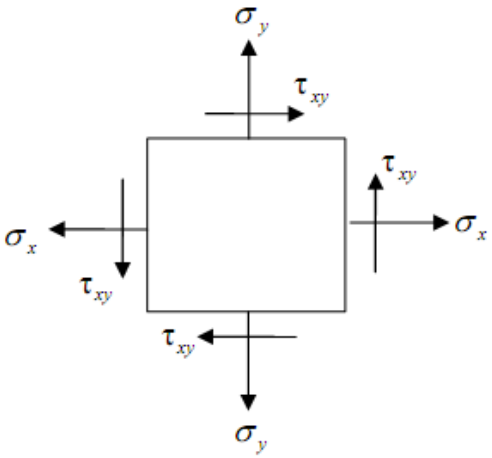


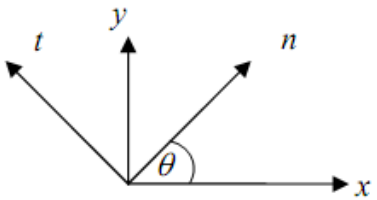
(ก) ความเค้นในวัสดุชิ้นเล็กทั่ว ๆ ไป

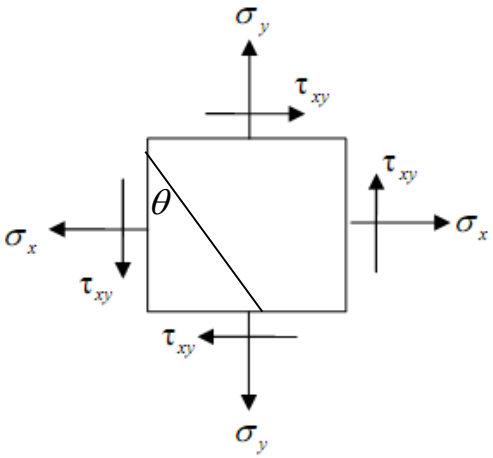


(ข) ความเค้นบนระนาบ 2 มิติ

ความเค้นผสม







$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

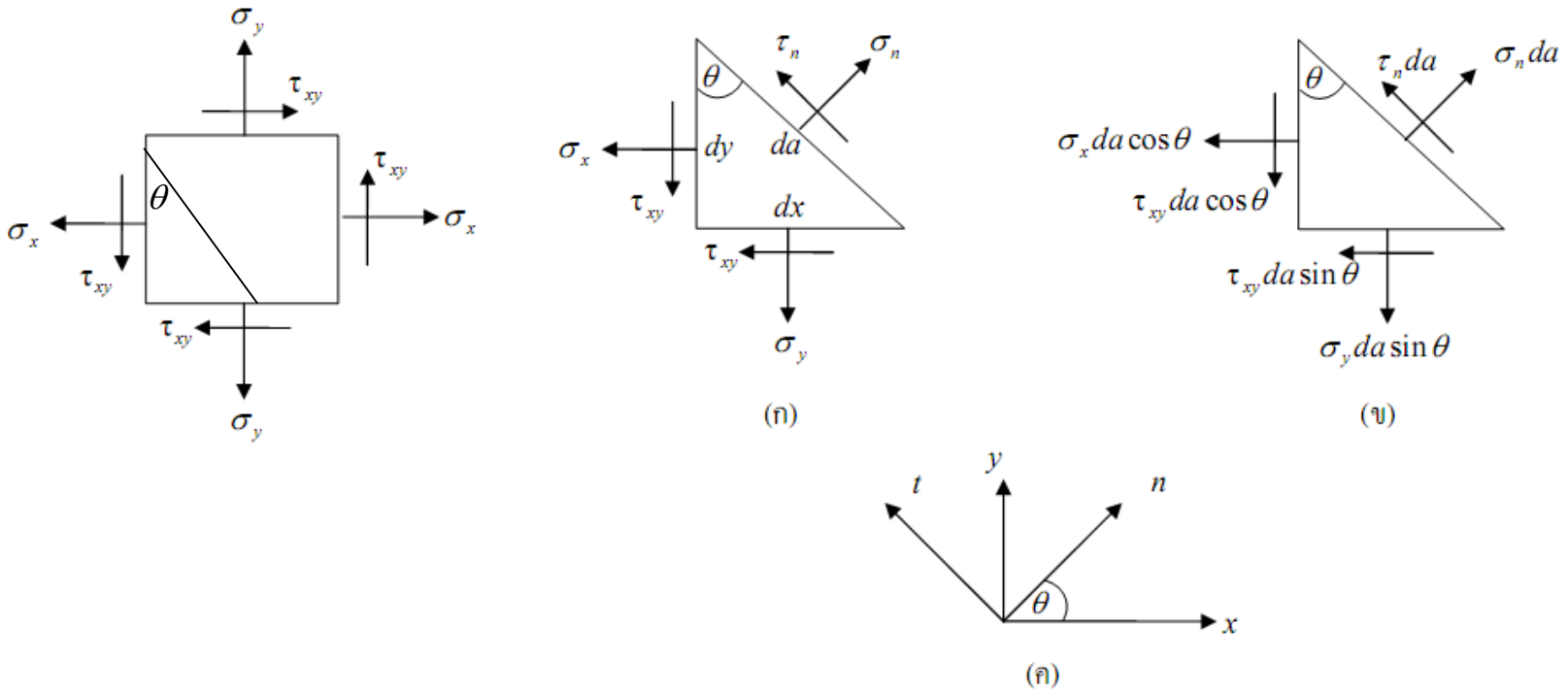
ไม่ใช่ความเค้นสูงสุดบนชิ้นส่วน

งานทางวิศวกรรม ต้องการทราบค่า $\max.\sigma, \min.\sigma$ $\max.\tau$

ดังนั้น ต้องหามุม θ ที่ทำให้เกิด $\max.\sigma, \min.\sigma$

และมุม θ ที่ทำให้เกิด $\max.\tau$

ความเค้นผสม



ความเค้นในทิศทางของ n และ t หาได้โดยการสมดุลแรง

ความเค้นตั้งฉาก $$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

ความเค้นเฉือน $$\tau_n = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

ความเค้นผสม

– $\max.\sigma, \min.\sigma$ หาได้จากการ diff σ_n เทียบกับ θ เท่ากับ 0 ซึ่งเรียกว่า ความเค้นหลัก (principal stress) มีค่า

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

ความเค้นหลัก คือ ความเค้นในแนวตั้งฉากที่มีค่าสูงสุดและต่ำสุด ซึ่งอยู่บนระนาบหลัก (ระนาบที่ไม่มีความเค้นเฉือน)

– $\max.\tau, \min.\tau$ หาได้จากการ diff τ_n เทียบกับ θ เท่ากับ 0

$$\tau_1, \tau_2 = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

ความเค้นผสม

-ความเค้นเฉือนสูงสุดในเทอมของความเค้นหลัก

ความเค้นเฉือนสูงสุด –สามารถเขียนอยู่ในเทอมของความเค้นหลักได้ โดย

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

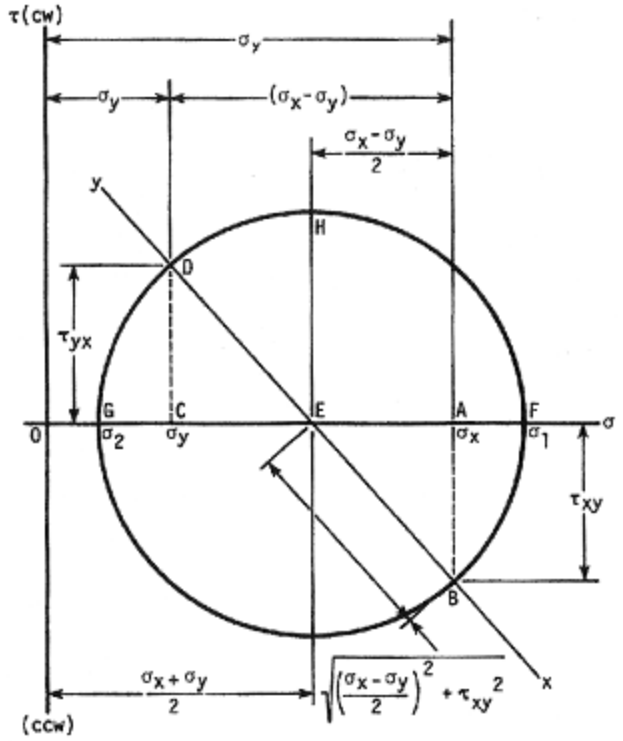
เช่น

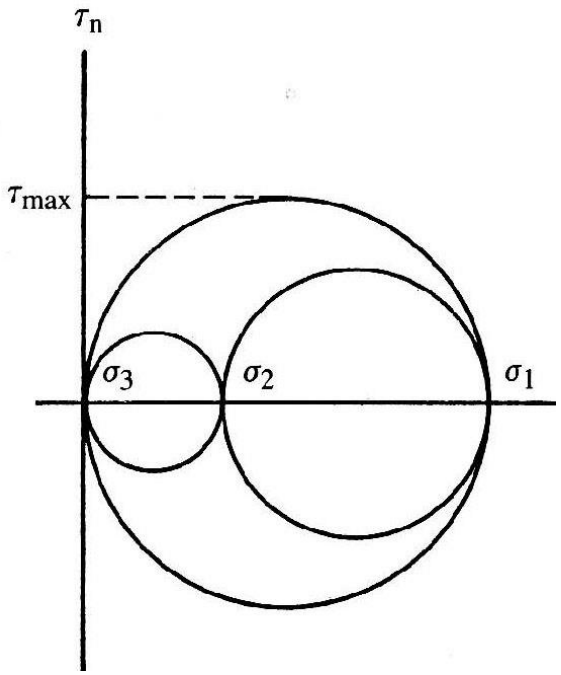
$$\sigma_1 = +,\ \sigma_2 = -,\ \sigma_3 = 0 \Rightarrow \sigma_{max} = \sigma_1,\ \sigma_{min} = \sigma_2 \Rightarrow \tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

$$\sigma_1 = +,\ \sigma_2 = +,\ \sigma_3 = 0,\ \sigma_1 > \sigma_2 \Rightarrow \sigma_{max} = \sigma_1,\ \sigma_{min} = 0 \Rightarrow \tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2}$$

ความเค้นผสม

ความเค้นหลักและความเค้นเฉือนสูงสุด อาจจะหาได้จาก วงกลมของมอร์ (Mohr's circle)



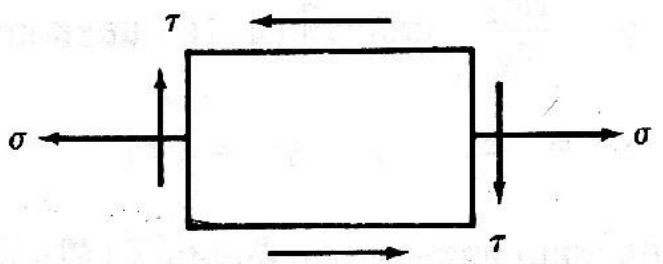


ความเค้นเฉือนสูงสุดหาจากวงกลมมอร์ที่สมบูรณ์

ความเค้นผสม

ความเค้นผสมในชิ้นส่วนของเครื่องจักรกล

ในการออกแบบเครื่องจักรกล อาจจะพบความเค้นในลักษณะดังรูป (มี normal stress ทิศทางเดียว)



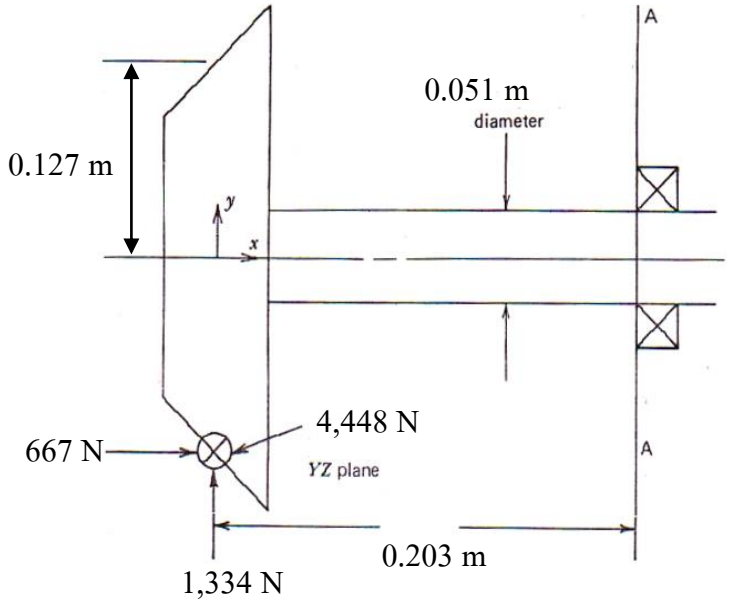
ความเค้นหลักและความเค้นเฉือนสูงสุด หาได้จาก

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \Rightarrow \quad \sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \Rightarrow \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

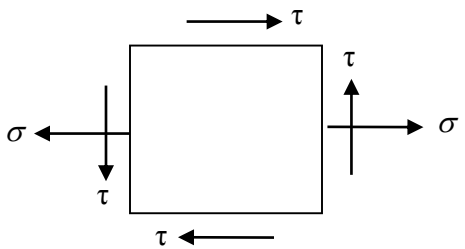
ความเค้นผสม

ตัวอย่าง 4.1 จากเฟืองดอกจอกดังรูป จงคำนวณหาความเค้นเฉือนสูงสุดที่ระนาบ AA



หา τ_{max}

ความเค้นที่เกิดขึ้นคือ?



$$\sigma = \sigma_c + \sigma_b = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I}$$

$$\tau = \frac{Tr}{J}$$

ทฤษฎีความเสียหาย

ทฤษฎีความเสียหาย

ถูกสร้างขึ้นมาเพื่อ ใช้วิเคราะห์และอธิบายความเสียหายของชิ้นงาน

วัสดุเปราะ

ทฤษฎีความเค้นหลักสูงสุด (maximum normal stress)

ทฤษฎีของคูลอมบ์-มอร์สำหรับวัสดุเปราะ (brittle Coulumb-Mohr theory)

ทฤษฎีของมอร์ดัดแปลง (modified Mohr theory)

วัสดุเหนียว

ทฤษฎีความเค้นเฉือนสูงสุด (maximum shear stress theory)

ทฤษฎีความเค้นเฉือนออคตะฮีดรัล (octagonal shear stress theory)

ทฤษฎีพลังงานการผิดรูป (distortion energy theory)

ทฤษฎีความเสียหาย

ทฤษฎีความเค้นหลักสูงสุด

วัสดุจะเกิดความเสียหาย เมื่อความเค้นหลักสูงสุดในวัสดุมีค่าเท่ากับความต้านแรงดึงของวัสดุนั้น

$$\sigma_{max} = S_u$$

กรณี 1 $|\sigma_1| > |\sigma_2|$ ⇨ $\sigma_1 = \pm \frac{S_u}{N}$

กรณี 2 $|\sigma_2| > |\sigma_1|$ ⇨ $\sigma_2 = \pm \frac{S_u}{N}$

เมื่อนำ ทบ.ความเค้นหลักสูงสุดใช้กับวัสดุเหนียวสามารถใช้ค่าความต้านแรงดึงครากของวัสดุเหนียว

$$\sigma_{max} = S_y$$

ทฤษฎีความเสียหาย

ทฤษฎีความเค้นเฉือนสูงสุด

วัสดุจะเกิดความเสียหาย เมื่อความเค้นเฉือนสูงสุดในวัสดุมีค่าเท่ากับความต้านแรงเฉือนสูงสุดที่ได้จากการทดสอบแรงดึงจนถึงจุดครากของวัสดุนั้น

$$\tau_{max} = S_{sy} \qquad \text{โดยที่} \quad S_{sy} = 0.5S_y$$

กรณี 1 $\sigma_1 = +$, $\sigma_2 = -$, $\sigma_3 = 0$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = S_{sy} = \pm\frac{S_y}{2N}$$

กรณี 2 $\sigma_1 = +$, $\sigma_2 = +$, $\sigma_3 = 0$

$\sigma_1 > \sigma_2$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2} = \pm\frac{S_y}{2N}$$

$\sigma_2 > \sigma_1$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_2}{2} = \pm\frac{S_y}{2N}$$

ทฤษฎีความเสียหาย

สมการสำหรับออกแบบชิ้นส่วนเครื่องจักรกล

ความเค้นในกรณีทั่วไป

$$\tau_{\max} = \frac{S_{sy}}{N} = \left(\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ความเค้นในชิ้นส่วนเครื่องจักรกล

$$\tau_{\max} = \frac{S_{sy}}{N} = \left(\left(\frac{\sigma}{2} \right)^2 + \tau^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

จัดรูปสมการใหม่ ได้

สมการสำหรับออกแบบชิ้นงาน

$$\frac{1}{N} = \left(\left(\frac{\sigma}{S_y} \right)^2 + \left(\frac{\tau}{S_{sy}} \right)^2 \right)^{1/2}$$

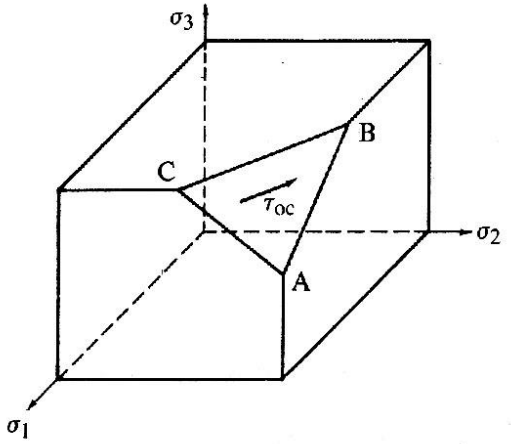
โดยที่ $S_{sy} = 0.5 S_y$

ทฤษฎีความเสียหาย

ทฤษฎีความเค้นเฉือนออคตะฮีดรัล

วัสดุจะเกิดความเสียหาย เมื่อความเค้นเฉือนออคตะฮีดรัลในวัสดุมีค่าเท่ากับความเค้นเฉือนออคตะฮีดรัลที่ได้จากการทดสอบแรงดึงชิ้นงานขณะถึงจุดคราก

ระนาบออคตะฮีดรัล (octahedral plane) คือ ระนาบที่เอียงทำมุมกับทิศทางของความเค้นหลักทั้ง 3 เท่ากัน



ความเค้นเฉือนออคตะฮีดรัล (octahedral shear stress) ที่เกิดขึ้นในวัสดุมีค่า

$$\tau_{oc} = \frac{1}{3}\left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right)^{1/2}$$

ทฤษฎีความเสียหาย

ความเค้นเฉือนออคตะฮีดรัล $\tau_{oc} = \frac{1}{3}\left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right)^{1/2}$

ส่วนในการทดสอบแรงดึง $\sigma_2, \sigma_3 = 0; \sigma_1 = S_y$

จะได้ ความเค้นเฉือนออคตะฮีดรัลขณะถึงจุดคราก $\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} S_y$

เนื่องจากทฤษฎีบอกว่า จะเกิดความเสียหาย เมื่อ $\tau_{oc} = \tau_{oct}$

จะได้ $2S_y^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2$

ในการออกแบบเครื่องจักรกลทั่วไป พิจารณา 2 มิติ $\sigma_3 = 0$

และเมื่อใช้ค่าความปลอดภัย N จะได้สมการ

$$\left(\frac{S_y}{N}\right)^2 = \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2$$

ความเค้นผสมและทฤษฎีความเสียหาย

สมการสำหรับออกแบบชิ้นส่วนเครื่องจักรกล

ความเค้นในกรณีทั่วไป

$$\left(\frac{S_y}{N}\right)^2 = \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2$$

ความเค้นในชิ้นส่วนเครื่องจักรกล

$$\frac{S_y}{N} = \left(\sigma^2 + 3\tau^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{N} = \left(\left(\frac{\sigma}{S_y}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}\tau}{S_y}\right)^2\right)^{1/2}$$

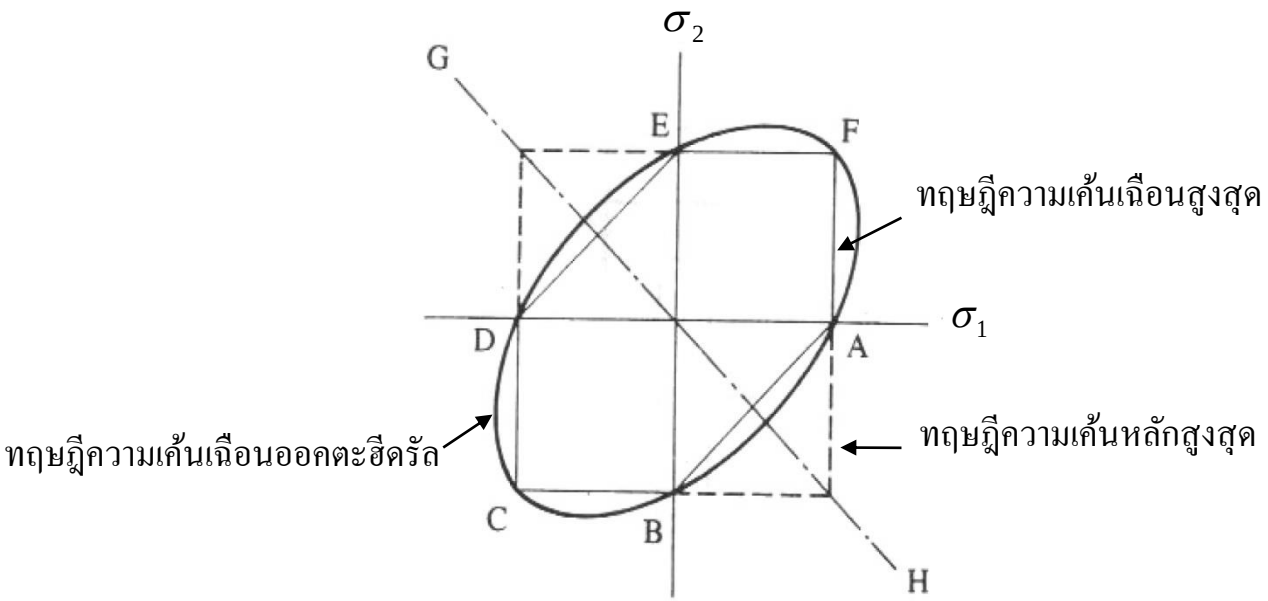
เมื่อ $S_{sy} = \frac{S_y}{\sqrt{3}} = 0.577 S_y$

สมการสำหรับออกแบบชิ้นงาน

$$\frac{1}{N} = \left(\left(\frac{\sigma}{S_y}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{S_{sy}}\right)^2\right)^{1/2}$$

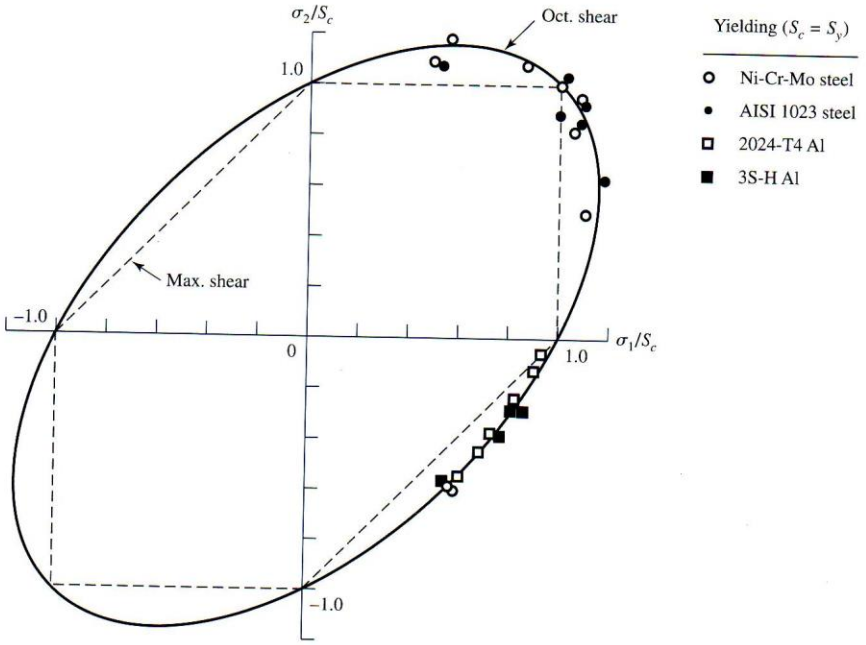
ความเค้นผสมและทฤษฎีความเสียหาย

เปรียบเทียบขอบเขตของความเค้นระหว่างทฤษฎีความเสียหายทั้ง 3



ความเค้นผสมและทฤษฎีความเสียหาย

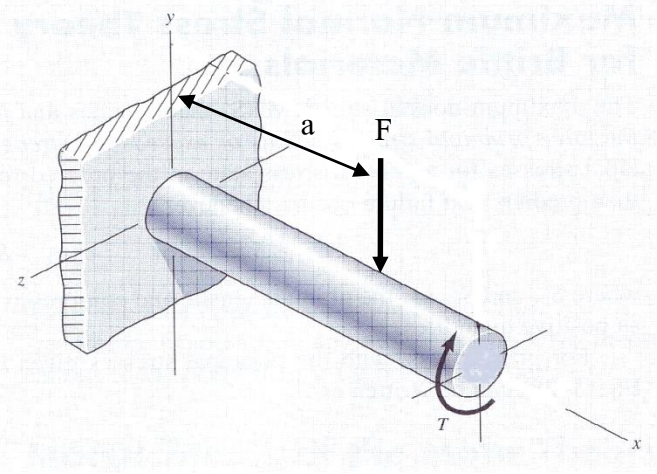
เปรียบเทียบทฤษฎีความเสียหายสำหรับวัสดุเหนียวกับผลการทดสอบวัสดุ



ทบ.ความเค้นเฉือนออคตะฮีดรัลให้ผลแม่นยำมากกว่าทบ.เค้นเฉือนสูงสุด

ความเค้นผสมและทฤษฎีความเสียหาย

ตัวอย่าง 4.2 เพลากลมรับแรง F=50 kN ที่ระยะ a=150 mm และรับ T=1000 Nm ถ้าเพลาทำจากวัสดุ AISI 1040 A จงหาขนาดเพลาโดยใช้ ทฤษฎีความเสียหายทั้ง 3 ทฤษฎี



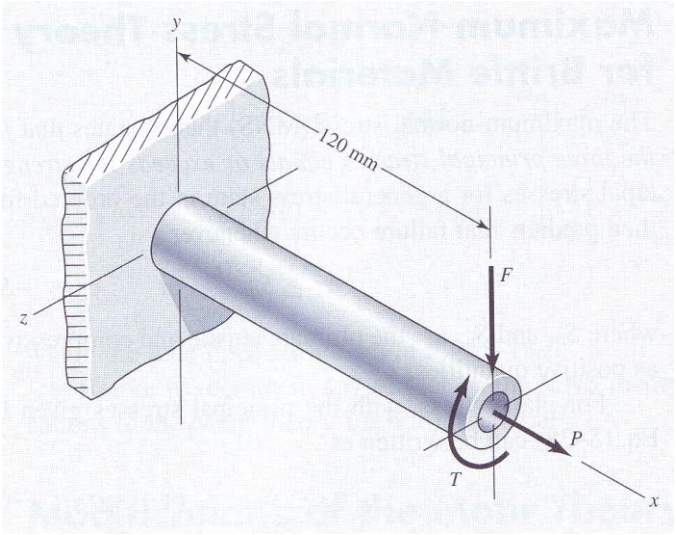
ความเค้นที่เกิดขึ้นคือ?

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{32M}{\pi d^3}$$

$$\tau = \frac{Tr}{J} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

ความเค้นผสมและทฤษฎีความเสียหาย

ตัวอย่าง 4.3



ความเค้นที่เกิดขึ้นคือ?

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I}$$

$$\tau = \frac{Tr}{J}$$