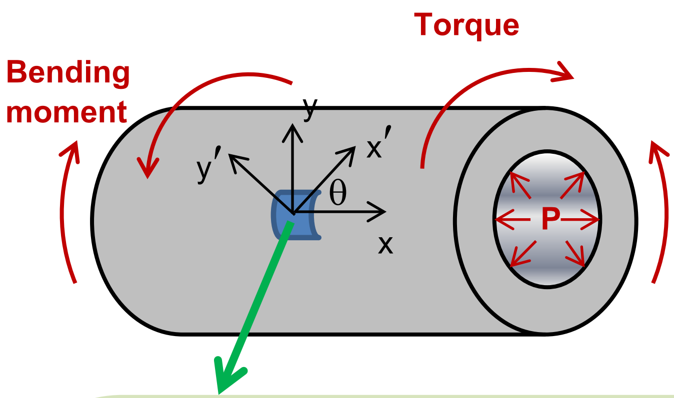
Failure Theories

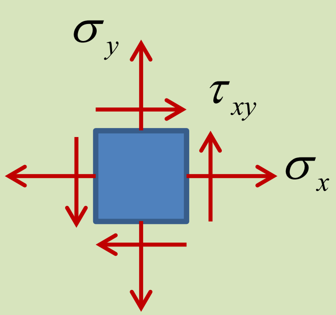
- Review stress transformation
- Failure theories for ductile materials
- Maximum-Shear-Stress Theory
- Distortion-Energy Theory
- Coulomb-Mohr Theory
- Failure theories for brittle materials
- Maximum-Normal-Stress Theory
- Modifications of the Mohr Theory

2103320 Des Mach Elem
Mech. Eng. Department
Chulalongkorn University

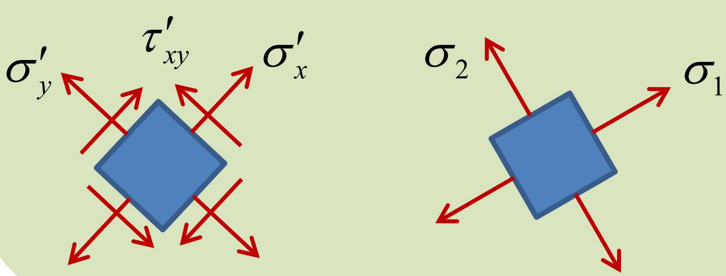
Stress transformation



- จุด ๆ หนึ่งบนวัตถุ จะมีค่า State of stress (σ_x, σ_y, τ_{xy}) อย่างหนึ่ง
- เมื่อใช้ระบบพิกัดแตกต่างกัน จะอ่านค่า σ_x, σ_y, τ_{xy} ได้ต่างกัน คือได้ σ'_x, σ'_y, τ'_{xy} แต่ State of stress คงเดิม เพราะพิจารณาจุดเดิม
- เมื่อใช้ระบบพิกัดที่เหมาะสมอันหนึ่ง จะทำให้ $\tau'_{xy} = 0$ คือ มีแต่ σ_1, σ_2 เรียกทิศนั้นว่า Principal direction



State of stress เหมือนกัน Stress, shear ต่างกันที่มุมต่าง ๆ



$$\sigma'_x = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\sigma'_y = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} - \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau'_{xy} = \frac{(\sigma_y - \sigma_x)}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

Mohr's circle

กรณี 2 มิติ

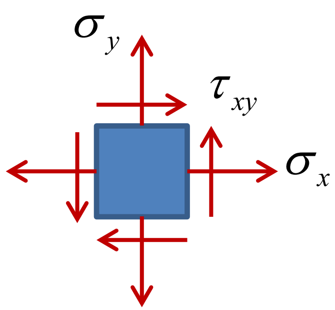
Principal stress $$\sigma_1,\sigma_2=\frac{(\sigma_x+\sigma_y)}{2}\pm\left(\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2\right)^{1/2}$$

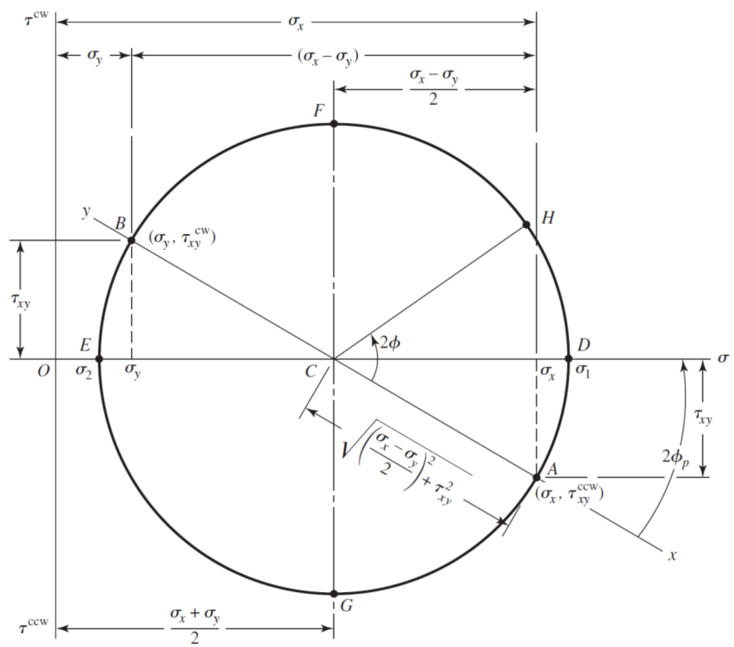
Maximum shear stress $$\tau_{\max}=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$$

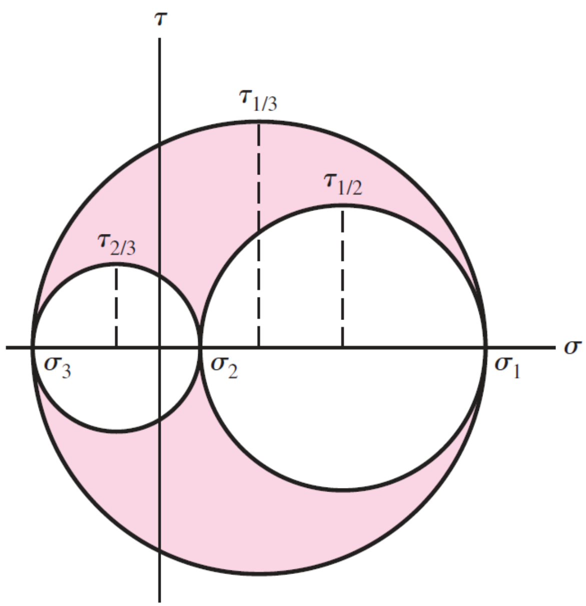
กรณี 3 มิติ

Principal stress $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ $\quad \sigma_1\ge\sigma_2\ge\sigma_3$

Maximum shear stress $$\tau_{\max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$$







Failure Theories

- การทดสอบวัสดุจะทำเพียงกรณีพื้นฐาน เช่น Tension test, Compression test กรณีที่มีภาระหลายๆ ชนิดกระทำ จึงต้องมีทฤษฎีที่บอกว่าความเสียหายจะเกิดเมื่อใด
- ไม่มีทฤษฎีความเสียหายไหนใช้ได้กับวัสดุทุกชนิด
- โดยปกติจะคิดแยกระหว่างวัสดุเหนียว (Ductile) กับวัสดุเปราะ (Brittle)
- ข้อมูลจะอ้างอิงจากผลการทดสอบพื้นฐาน เช่น Tension-test, Compression test

Ductile Materials

$\varepsilon_f \geq 0.05$ (Elongation $\geq$ 5%)

- Maximum shear stress theory (MSS)
- Distortion energy theory (DE)
- Ductile Coulomb-Mohr (DCM)

Brittle Materials

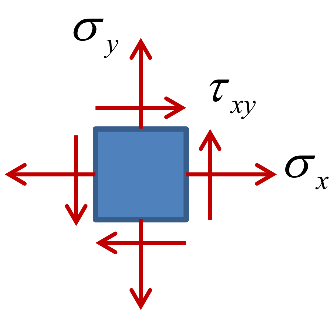
$\varepsilon_f < 0.05$ (Elongation $<$ 5%)

- Maximum normal stress theory (MNS)
- Brittle Coulomb-Mohr (BCM)
- Modifier Mohr (MM)

Maximum shear stress theory (1)

- ทฤษฎี ความเค้นเฉือนสูงสุด ทำนายว่า การครากจะเริ่มเกิดเมื่อ ค่าความเค้นเฉือนสูงสุดของจุดใด ๆ เท่ากับหรือมากกว่า ค่าความเค้นเฉือนสูงสุดที่ได้จาก Tension-test specimen ของวัสดุชนิดเดียวกับวัสดุที่กำลังพิจารณา
- อาจเรียกว่า Tresca หรือ Guest theory

State of stress ของจุดใด ๆ

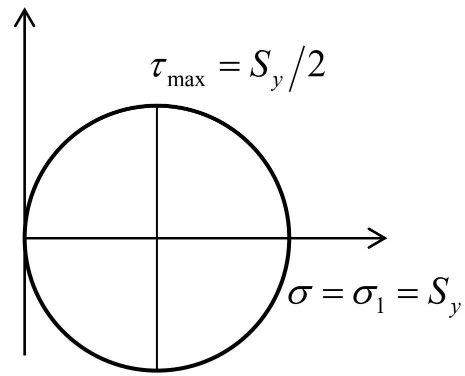


$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

การทดสอบ Tension-test

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2} = \frac{S_y}{2}$$



Yield เมื่อ $\tau_{\max} = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \geq \dfrac{S_y}{2}$ หรือ $\sigma_1 - \sigma_3 \geq S_y$ และจะได้ $S_{sy} = 0.5 S_y$

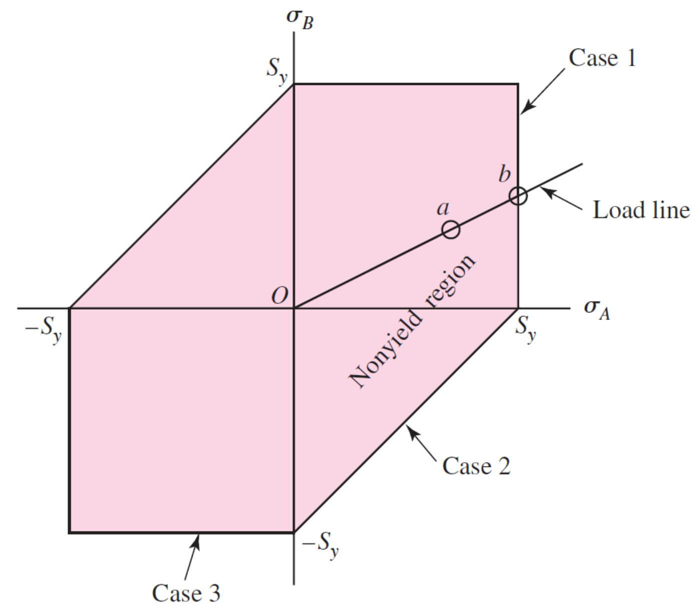
กรณีมี S.F. $\tau_{\max} = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \geq \dfrac{S_y}{2n}$ หรือ $\sigma_1 - \sigma_3 \geq S_y / n$

Maximum shear stress theory (2)

กรณี 2D - Plane stress

- พิจารณาที่ Principal direction
- กำหนดให้ $\sigma_A \geq \sigma_B$
- เนื่องจากไม่มีความเค้นที่ Plane ตั้งฉาก
  ดังนั้น Principal stress อีกตัว = 0

σ_A	σ_B	σ_1	σ_3	Yield condition
+	+	σ_A	0	$\sigma_A \geq S_y$
+	-	σ_A	σ_B	$\sigma_A - \sigma_B \geq S_y$
-	-	0	σ_B	$\sigma_B \leq -S_y$



จะ Yield เมื่อความเค้นอยู่นอกขอบเขตหกเหลี่ยมสีชมพู

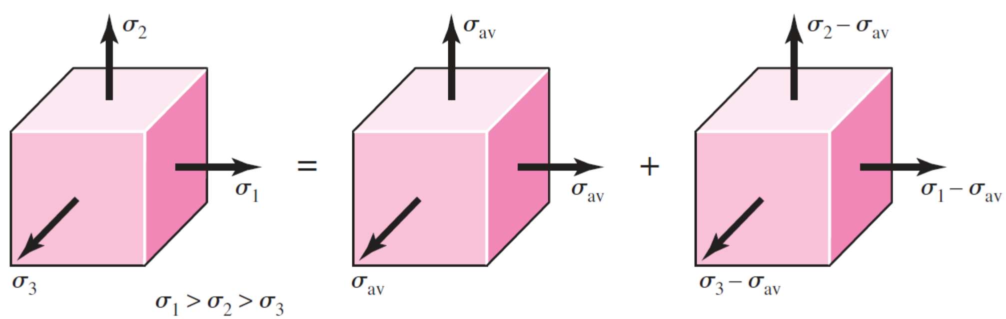
Distortion-Energy theory (1)

- ทฤษฎี Distortion energy ทำนายว่าการครากจะเริ่มเกิดเมื่อ distortion strain energy per unit volume ของจุดใด ๆ มีค่าเท่ากับหรือมากกว่า distortion strain energy per unit volume ที่ได้จากการทดสอบ Tension-test หรือ Compression-test ของวัสดุชนิดเดียวกับวัสดุที่กำลังพิจารณาขณะเกิดการคราก
- อาจเรียกทฤษฎีนี้ว่าว่า The von Mises หรือ von Mises-Hencky theory หรือ the octahedral-shear-stress theory

Angular distortion element

พิจารณาที่ Principal direction

$$\sigma_{av} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$



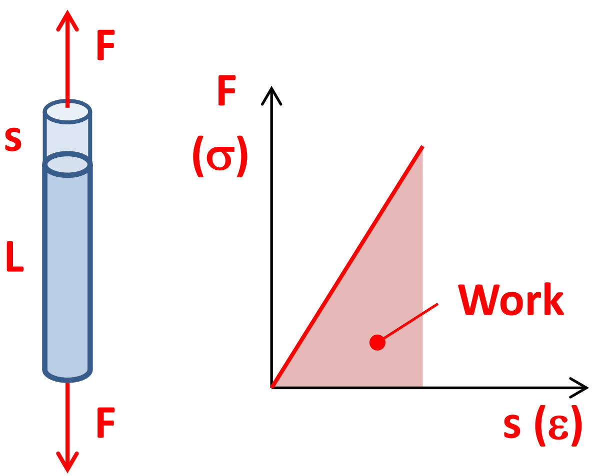
(*a*) Triaxial stresses (*b*) Hydrostatic component (*c*) Distortional component

Pure volume change Pure angular distortion

Strain energy per unit volume = Strain energy for producing only volume change + Distortion energy

Distortion-Energy theory (2)

Strain energy per unit volume



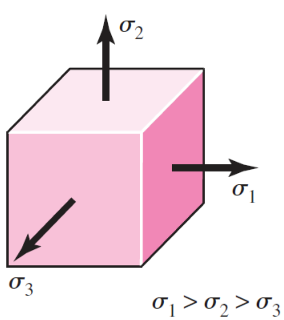
$$\text{work} = \int F \cdot ds = \text{Area under F - S graph}$$

$$\frac{\text{work}}{V} = \int \frac{F}{A} \cdot \frac{ds}{L} = \int \sigma \cdot d\varepsilon = \text{Area under } \sigma \text{ - } \varepsilon \text{ graph}$$

กรณี simple tension:

strain energy per unit volume

$$u = \int \sigma \cdot d\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon\sigma$$



(*a*) Triaxial stresses

$$u = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_1\sigma_1 + \varepsilon_2\sigma_2 + \varepsilon_3\sigma_3\right]$$

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right]$$

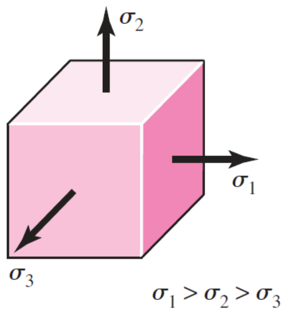
Hooke's law

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

Distortion-Energy theory (3)

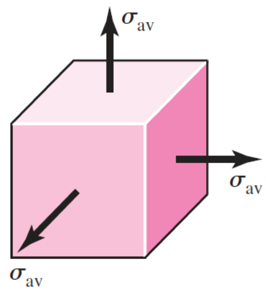


(*a*) Triaxial stresses

strain energy per unit volume

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right]$$

=



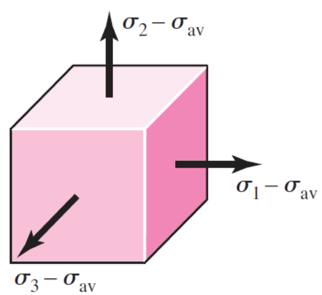
(*b*) Hydrostatic component

strain energy per unit volume

$$u_v = \frac{3\sigma_{av}^2}{2E}(1-2\nu)$$

$$u_v = \frac{1-2\nu}{2E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_3\sigma_1)$$

+



(*c*) Distortional component

Distortion energy

$$u_d = u - u_v = \frac{1+\nu}{3E}\left[\frac{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2}{2}\right]$$

Distortion-Energy theory (4)

- ทฤษฎี Distortion energy ทำนายว่าการครากจะเริ่มเกิดเมื่อ distortion strain energy per unit volume ของจุดใด ๆ มีค่าเท่ากับหรือมากกว่า distortion strain energy per unit volume ที่ได้จากการทดสอบ Tension-test หรือ Compression-test ของวัสดุชนิดเดียวกับวัสดุที่กำลังพิจารณาขณะเกิดการคราก

Distortion strain energy ของจุดใด ๆ

$$u_d = \frac{1+\nu}{3E}\left[\frac{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}{2}\right]$$

การทดสอบ Tension-test

ที่จุด Yield $\sigma_1 = S_y \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$

$$u_d = \frac{1+\nu}{3E} S_y^2$$

Yield เมื่อ

$$\frac{1+\nu}{3E}\left[\frac{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}{2}\right] \geq \frac{1+\nu}{3E} S_y^2$$

$$\underbrace{\left[\frac{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}{2}\right]^{1/2}}_{\text{Von Mises stress}} \geq S_y$$

Distortion-Energy theory (5)

Von Mises stress

$$\sigma' = \left[\frac{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}{2}\right]^{1/2}$$

กรณีพิกัด xyz (ไม่ใช่ principal direction)

$$\sigma' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)\right]^{1/2}$$

Yield เมื่อ **Von Mises stress σ' $\geq$ Yield strength S_y**

กรณีคิด Factor of Safety

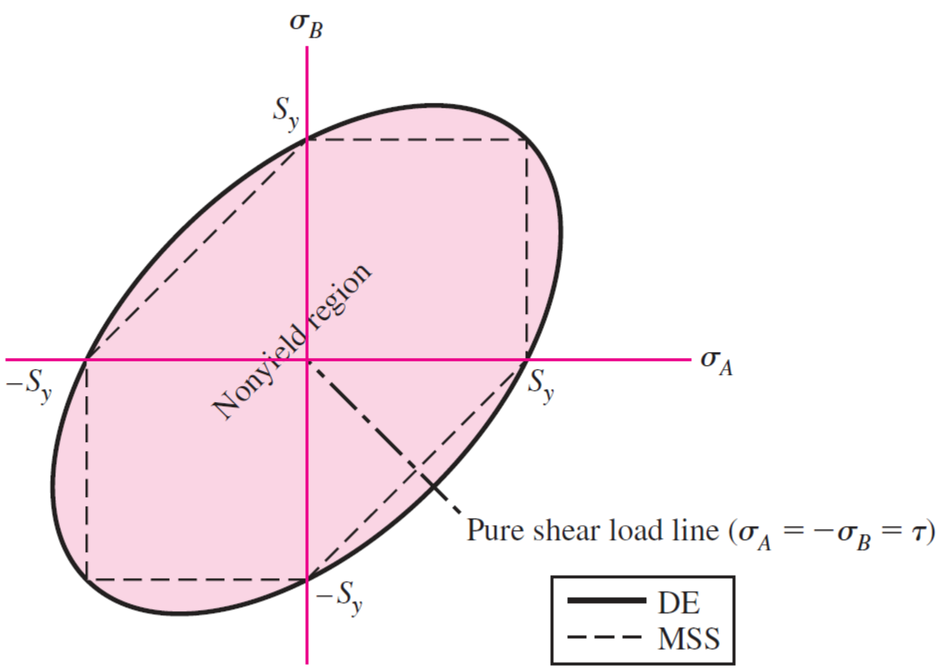
$$\sigma' \geq \frac{S_y}{n}$$

Distortion-Energy theory (6)

กรณี 2D - Plane stress

- พิจารณาที่ Principal direction
- กำหนดให้ $\sigma_A \geq \sigma_B$
- เนื่องจากไม่มีความเค้นที่ Plane ตั้งฉาก ดังนั้น Principal stress อีกตัว = 0

Von Mises stress $\sigma' = (\sigma_A^2 - \sigma_A\sigma_B + \sigma_B^2)^{1/2}$

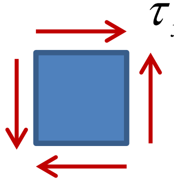


จะ Yield เมื่อความเค้นอยู่นอกขอบเขตวงรีสีชมพู

- เมื่อเทียบกับ Maximum shear stress theory แล้วจะพบว่า ขอบเขต Nonyield ของทฤษฎี Distortion-Energy จะกว้างกว่า
- ผลจาก Distortion-energy สอดคล้องกับผลการทดลองในกรณีของวัสดุเหนียว จึงเป็นที่นิยมใช้กันอย่างกว้างขวาง

Distortion-Energy theory (7)

กรณี 2D - Plane stress + pure shear



τ_{xy}

$$\sigma_x = \sigma_y = 0$$

จากสมการ von Mises stress
$$\sigma' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)\right]^{1/2}$$

$$\sigma' = (3\tau_{xy}^2)^{1/2}$$

Yield เมื่อ
$$\sigma' = (3\tau_{xy}^2)^{1/2} \geq S_y$$

$$\tau_{xy} \geq \frac{S_y}{\sqrt{3}} = 0.577 S_y$$

Shear yield strength

$$S_{sy} = 0.577 S_y$$

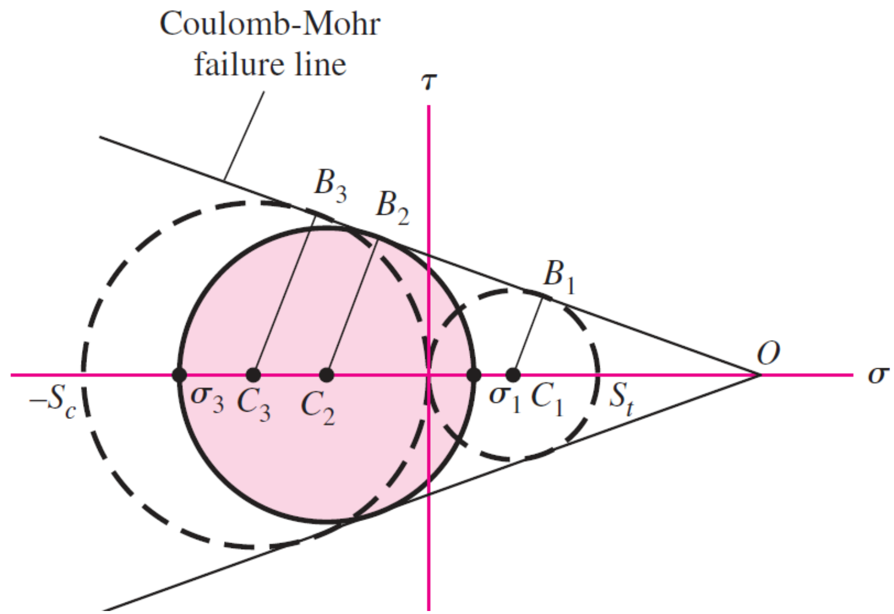
Example

วัสดุชนิดหนึ่งมี yield strength Syc = Syt = 100 Mpa และมีค่า εf = 0.55 ให้หา factor of safety ในกรณีต่อไปนี้

(Mpa)	σ_x	σ_y	τ_{xy}
a	70	70	0
b	60	40	-15
c	0	40	45
d	-40	-60	15
e	30	30	30

Coulomb-Mohr Theory (Ductile Materials) (1)

- ใช้กับวัสดุที่ strength ด้านดึงไม่เท่ากับด้านกด
- ใช้ข้อมูลการทดสอบ Tension test และ Compression test เขียน Mohr's circle
- ลากเส้นตรงสัมผัสวงกลมทั้งสอง และกำหนดให้เป็น Failure line
- ถ้า stress และ shear เกินกว่าขอบเขตนี้ จะเกิดความเสียหาย



จากสามเหลี่ยมคล้าย

$$\frac{B_2C_2 - B_1C_1}{C_1C_2} = \frac{B_3C_3 - B_1C_1}{C_1C_3}$$

$$B_1C_1 = S_t/2 \qquad \text{origin} - C_1 = S_t/2$$

$$B_2C_2 = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 \qquad \text{origin} - C_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$$

$$B_3C_3 = S_c/2 \qquad \text{origin} - C_3 = S_c/2$$

$$\frac{\sigma_1}{S_t} - \frac{\sigma_3}{S_c} = 1$$

Yield เมื่อ $\frac{\sigma_1}{S_t} - \frac{\sigma_3}{S_c} \geq 1$

คิด S.F.

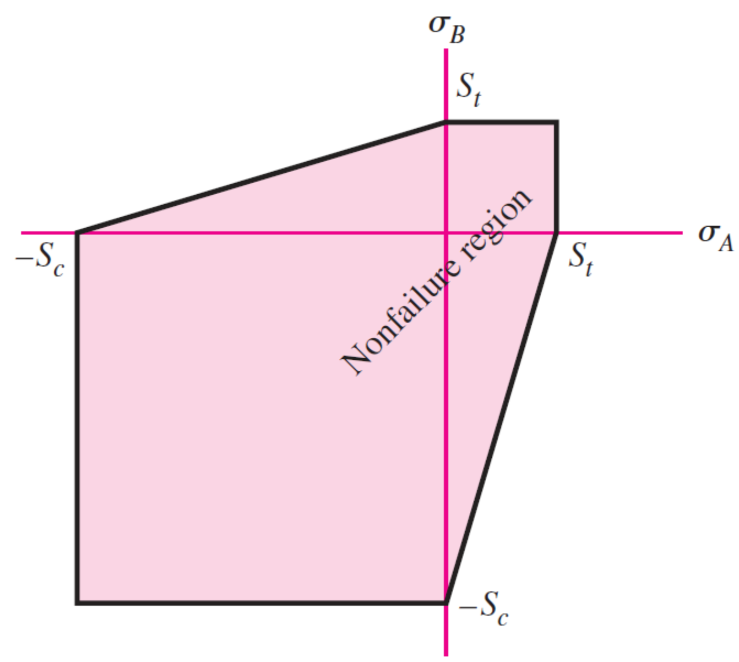
Yield เมื่อ $\frac{\sigma_1}{S_t} - \frac{\sigma_3}{S_c} \geq \frac{1}{n}$

Coulomb-Mohr Theory (Ductile Materials) (2)

กรณี 2D - Plane stress

- พิจารณาที่ Principal direction
- กำหนดให้ $\sigma_A \geq \sigma_B$
- เนื่องจากไม่มีความเค้นที่ Plane ตั้งฉาก ดังนั้น Principal stress อีกตัว = 0

σ_A	σ_B	σ_1	σ_3	Yield condition
+	+	σ_A	0	$\sigma_A \geq S_t$
+	-	σ_A	σ_B	$\dfrac{\sigma_A}{S_t} - \dfrac{\sigma_B}{S_c} \geq 1$
-	-	0	σ_B	$\sigma_B \leq -S_c$



จะ Yield เมื่อความเค้นอยู่นอกขอบเขตหกเหลี่ยมสีชมพู

Maximum-Normal-Stress Theory (Brittle)

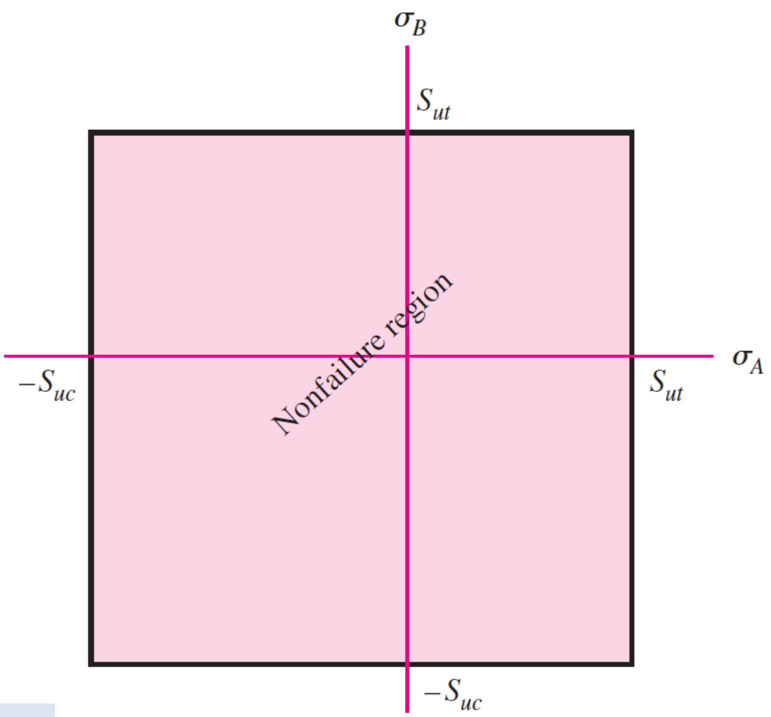
- **ทฤษฎี Maximum-Normal-Stress ทำนายว่าความเสียหายจะเกิดเมื่อ ค่า Principal stress ตัวใดตัวหนึ่ง มีค่าเท่ากับหรือมากกว่า ค่า Strength**

Principal stress $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

Yield เมื่อ $\sigma_1 \geq S_{ut}$ หรือ $\sigma_3 \leq -S_{uc}$

คิด S.F.

Yield เมื่อ $\sigma_1 \geq \dfrac{S_{ut}}{n}$ หรือ $\sigma_3 \leq -\dfrac{S_{uc}}{n}$



Note

Brittle materials ไม่มีค่า yield strength ที่ชัดเจน จึงมักใช้ค่า ultimate tensile หรือ ultimate compressive stress แทน

Modifications of the Mohr Theory (Brittle)

Brittle-Coulomb-Mohr

พิจารณากรณี plane stress และคิด Safety factor

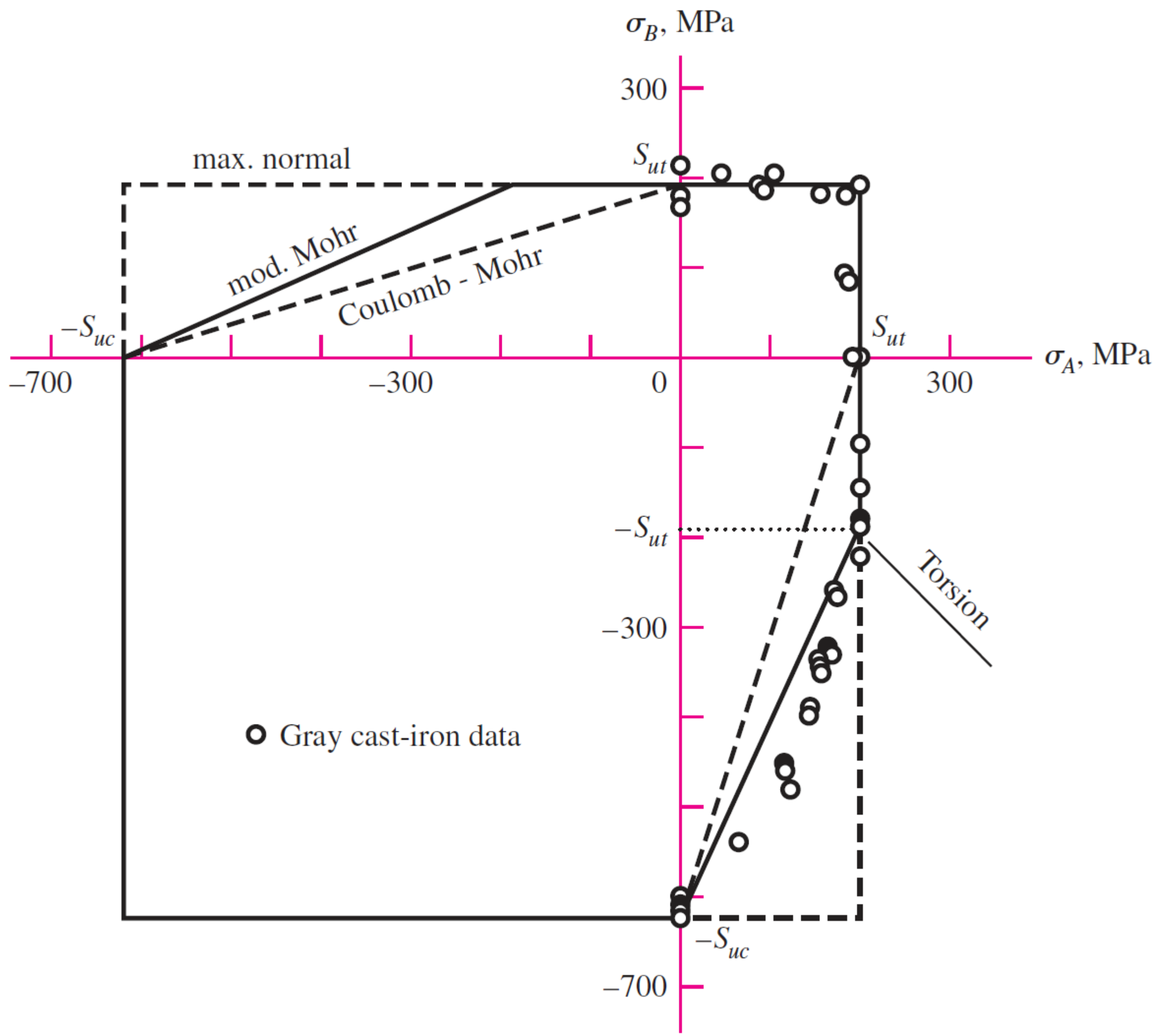
σ_A	σ_B	σ_1	σ_3	Yield condition
+	+	σ_A	0	$\sigma_A \geq S_{ut}/n$
+	-	σ_A	σ_B	$\frac{\sigma_A}{S_{ut}} - \frac{\sigma_B}{S_{uc}} \geq \frac{1}{n}$
-	-	0	σ_B	$\sigma_B \leq -S_{uc}/n$

Modified Mohr

พิจารณากรณี plane stress และคิด Safety factor

σ_A	σ_B	σ_1	σ_3	Yield condition
+	+	σ_A	0	$\sigma_A \geq S_{ut}/n$
+	-	σ_A	σ_B	$\sigma_A \geq S_{ut}/n$
		$\lvert\sigma_B/\sigma_A\rvert \leq 1$		
+	-	σ_A	σ_B	$\frac{(S_{uc}-S_{ut})\sigma_A}{S_{uc}S_{ut}} - \frac{\sigma_B}{S_{uc}} \geq \frac{1}{n}$
		$\lvert\sigma_B/\sigma_A\rvert > 1$		
-	-	0	σ_B	$\sigma_B \leq -S_{uc}/n$

Modifications of the Mohr Theory (Brittle)



Selection of Failure Criteria