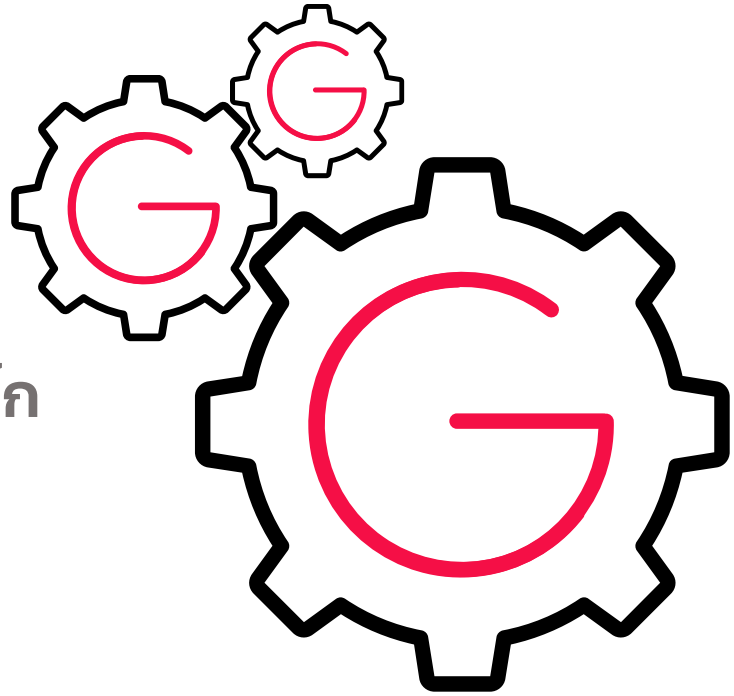
MTE
436

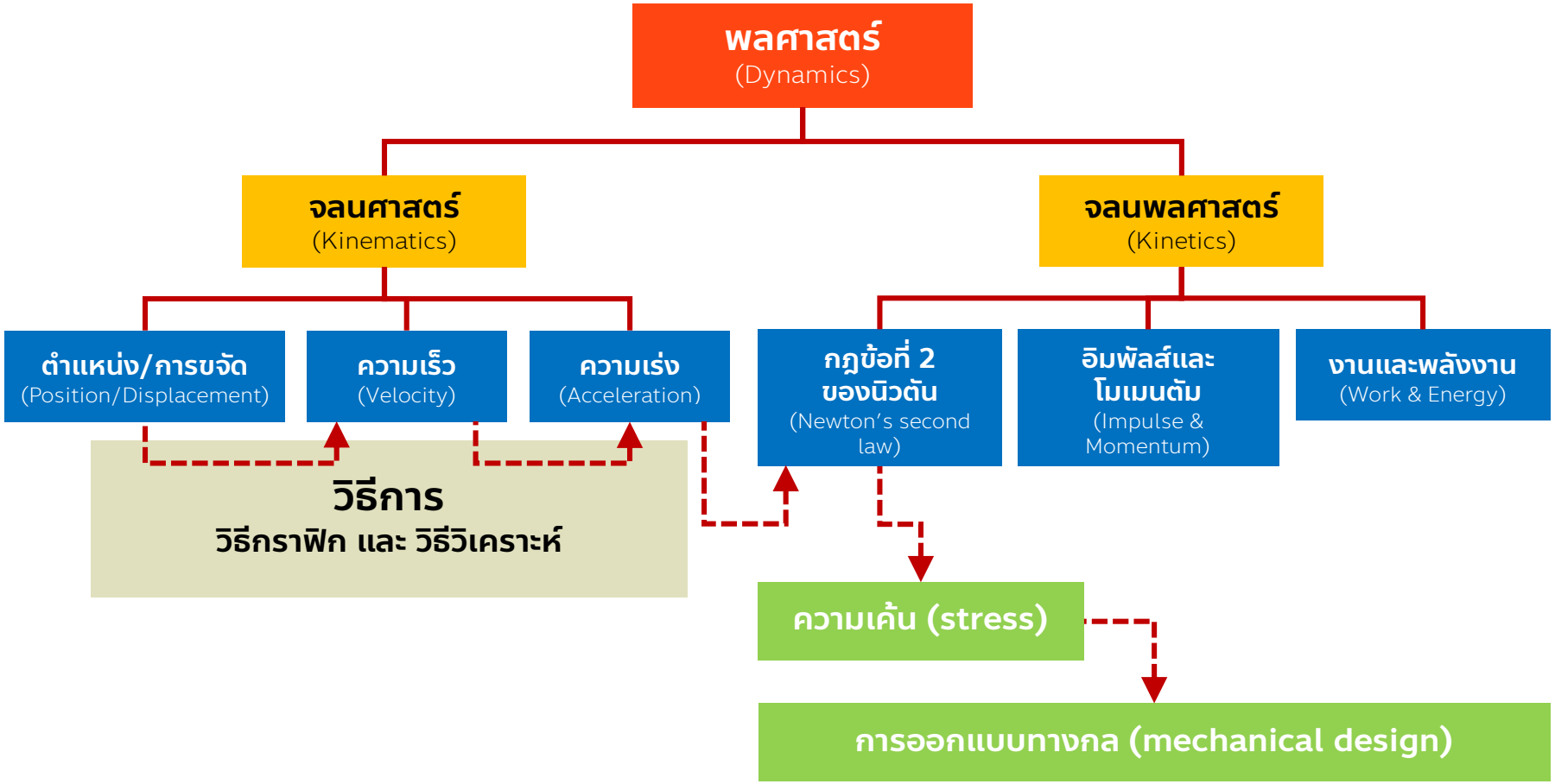


Acceleration

การวิเคราะห์ความเร่งของกลไก

สไลด์นี้นำเสนอการวิเคราะห์ความเร่งในกลไก ซึ่งต้องอาศัยการวิเคราะห์ตำแหน่ง และการวิเคราะห์ความเร็ว

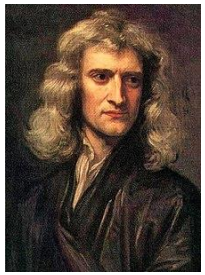
ผังความสัมพันธ์



การวิเคราะห์ความเร่ง (acceleration analysis)

เป็นวิธีการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ (motion analysis) ของวัตถุลักษณะหนึ่งที่ต้องการหาความเร่งในชิ้นส่วนของกลไก

ความเร่งเป็นปริมาณทางฟิสิกส์ที่สำคัญเนื่องด้วยจะทำให้เราหาค่าแรงที่กระทำต่อวัตถุตามกฎข้อที่ 2 ของนิวตันได้ตามสมการ



$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

วิธีการหาความเร่งแบ่งออกได้ 2 แบบ คือ

- วิธีวิเคราะห์ความเร่งสัมบูรณ์ (absolute acceleration)
- วิธีวิเคราะห์ความเร่งสัมพัทธ์ (relative acceleration)

วิธีวิเคราะห์แบบความเร่งสัมบูรณ์มีสาระสำคัญ คือ การหาความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิตของการเคลื่อนที่ของกลไกที่สนใจ จากนั้นจึงทำการหาอนุพันธ์เพื่อหาความเร็ว และความเร่ง **ข้อเด่นของวิธีการนี้ คือ ได้คำตอบที่แม่นยำ แต่ข้อด้อย คือ ความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิตอาจกระทำได้ยาก**

วิธีวิเคราะห์แบบความเร่งสัมพัทธ์มีสาระสำคัญ คือ การหาความเร่งสัมพัทธ์ระหว่างชิ้นส่วนในกลไกเพื่อจะนำไปสู่การหาความเร่งสัมบูรณ์**ข้อเด่นของวิธีการนี้ คือ วิเคราะห์ได้ค่อนข้างรวดเร็ว แต่ข้อด้อย คือ คำตอบที่ได้มีความละเอียดน้อยโดยเฉพาะวิธีการกราฟิก**

ทบทวนการวิเคราะห์ความเร็วด้วยวิธีความเร็วสัมพัทธ์

จากรูปเราสามารถเขียนสมการการกระจัดตามหลักการ **บวก-ลบเวกเตอร์**ได้ดังนี้

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}_{P/O'}$$

เมื่อหาอนุพันธ์เทียบกับเวลาได้สมการความเร็วดังนี้

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{v}_{P/O'}$$

ความเร็วสัมบูรณ์ของจุด P เทียบกับ O

ความเร็วสัมพัทธ์ของจุด P เทียบกับ O'

ความเร็วสัมบูรณ์ของจุด O' เทียบกับ O

หรือ

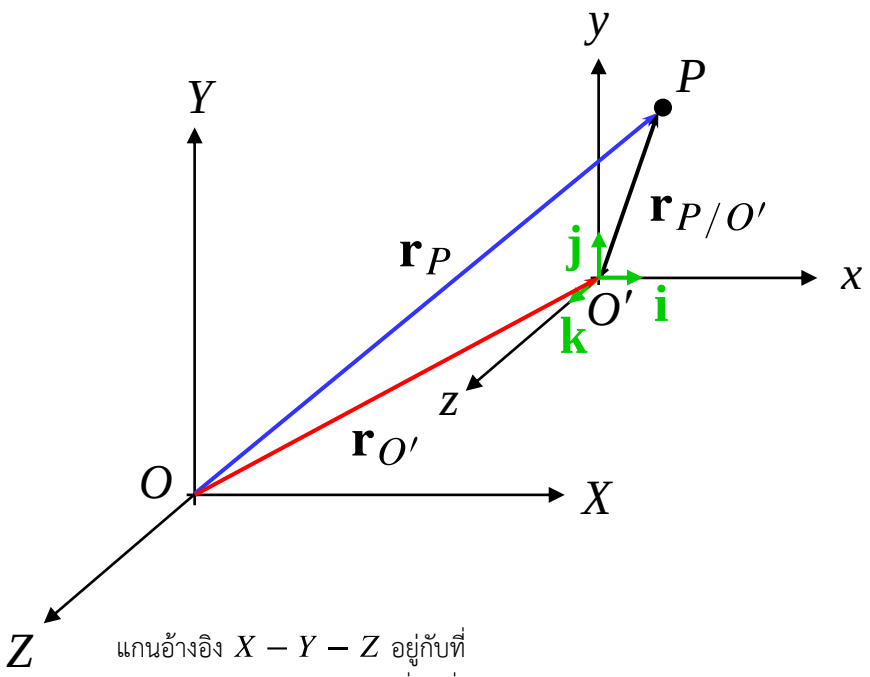
$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/O'}$$

ความเร็วสัมบูรณ์ของจุด P เทียบกับ O

ความเร็วของจุด P เทียบกับ O' เนื่องจากการหมุนของแกน x-y-z

ความเร็วสัมบูรณ์ของจุด O' เทียบกับ O

ความเร็วของจุด P เทียบกับ O'



แกนอ้างอิง $X - Y - Z$ อยู่กับที่

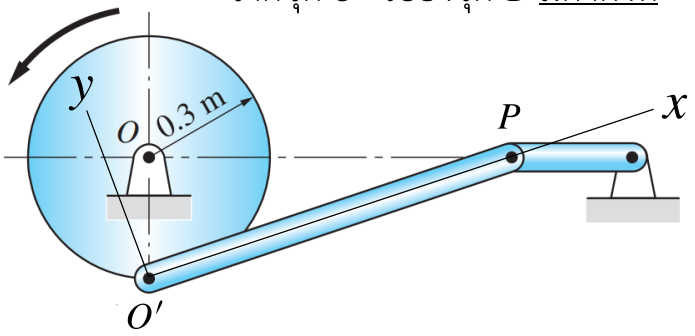
แกนอ้างอิง $x - y - z$ เคลื่อนที่เทียบกับ $X - Y - Z$

ทบทวนการวิเคราะห์ความเร็วด้วยวิธีความเร็วสัมพัทธ์

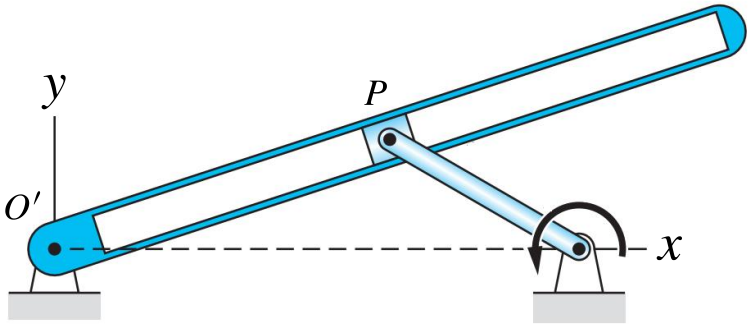
ตัวอย่างกลไกและสมการความเร็วที่สอดคล้องกัน

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{O'} + \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/O'}}_{\mathbf{v}_{P/O'}}$$

ไม่มี $\mathbf{v}$ เนื่องจากระยะห่างจากจุด O' ไปยังจุด $\mathbf{P}$ มีค่าคงที่



$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{O'} + \underbrace{\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/O'}}_{\mathbf{v}_{P/O'}}$$



มี $\mathbf{v}$ เนื่องจากระยะห่างจากจุด O' ไปยังจุด $\mathbf{P}$ มีค่าไม่คงที่ และมีทิศทางตามแนว $\overline{O'P}$

การวิเคราะห์ความเร่งด้วยวิธีความเร่งสัมพัทธ์

จากสมการความเร็ว

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/O'}$$

เมื่อหาอนุพันธ์เทียบกับเวลาได้สมการความเร่งดังนี้

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{O'} + \mathbf{a} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{P/O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/O'})$$

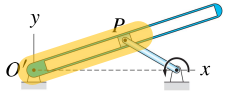
ความเร่งสัมบูรณ์ของจุด P เทียบกับ O

ความเร่งสัมบูรณ์ของจุด O' เทียบกับ O

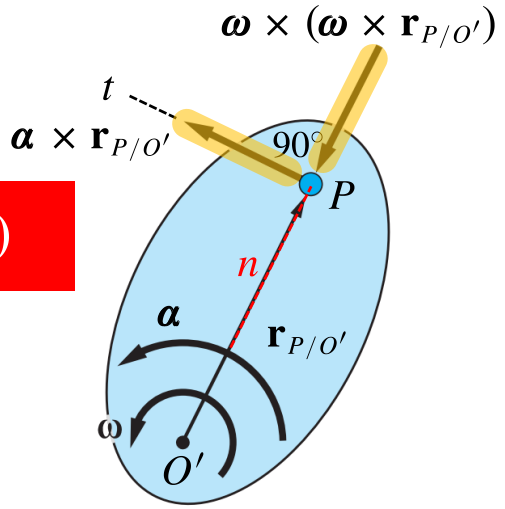
ความเร่ง Coriolis เกิดขึ้นเนื่องจากการเคลื่อนที่ของวัตถุหนึ่งบนวัตถุที่กำลังหมุน

ความเร่งของจุด P เทียบกับ O'

ความเร่งสัมผัส (tangent) ของจุด P เทียบกับ O' เนื่องจากการหมุนของแกน x-y-z



ความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลาง (centripetal) ของจุด P เทียบกับ O' เนื่องจากการหมุนของแกน x-y-z



แกน n-t	ความเร่งสัมผัส (t)	ความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลาง (n)
เวกเตอร์	$\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{P/O'}$	$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/O'})$
ขนาด(สเกลาร์)	$r_{P/O'}\alpha$	$\frac{v_{P/O'}^2}{r_{P/O'}}$ หรือ $r_{P/O'}\omega^2$
ทิศทาง	ตามแนวแกน t และทิศของ α	ตามแนวแกน n และพุ่งจาก P มา O'

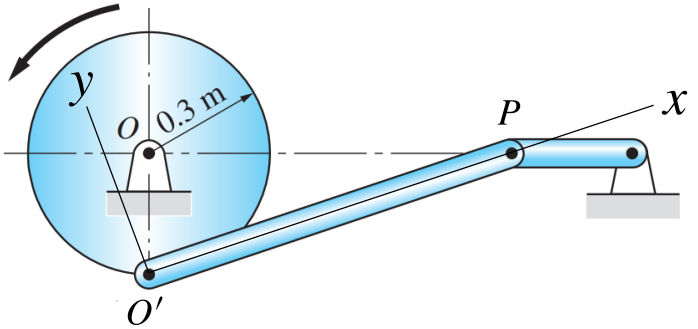
โดยที่ α คือ ความเร่งเชิงมุม และมีหน่วยเป็น rad/s^2 และความเร่งสัมผัสจะตั้งฉากกับความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลางเสมอ

การวิเคราะห์ความเร่งด้วยวิธีความเร่งสัมพัทธ์

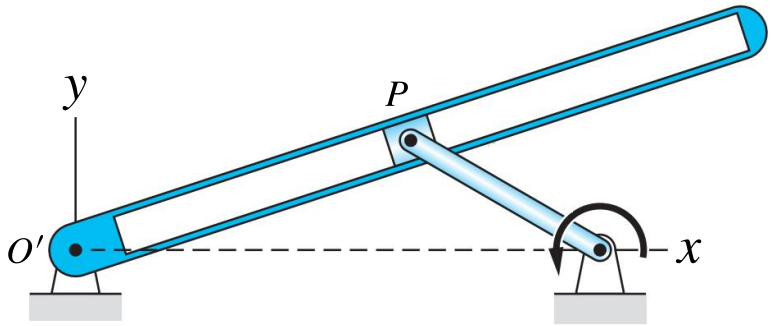
ตัวอย่างกลไกและสมการความเร่งที่สอดคล้องกัน

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{O'} + \underbrace{\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{P/O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/O'})}_{\mathbf{a}_{P/O'}}$$

ไม่มี $\mathbf{a}$ และ $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ เนื่องจากระยะห่างจากจุด O' ไปยังจุด $\mathbf{P}$ มีค่าคงที่



$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{O'} + \mathbf{a} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{P/O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/O'})}_{\mathbf{a}_{P/O'}}$$

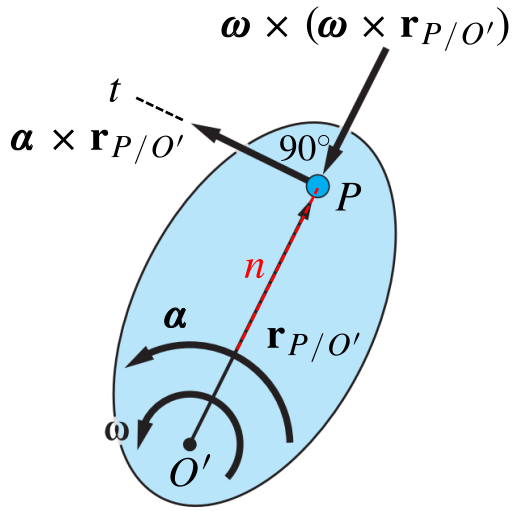


มี $\mathbf{a}$ และ $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ เนื่องจากระยะห่างจากจุด O' ไปยังจุด $\mathbf{P}$ มีค่าไม่คงที่ และ $\mathbf{a}$ มีทิศทางตามแนว $\overline{O'P}$

หลักในการวิเคราะห์ความเร่ง

การวิเคราะห์ความเร่งสามารถกระทำได้โดยอาศัยหลักการเช่นเดียวกันกับการวิเคราะห์ความเร็ว อย่างไรก็ตาม การวิเคราะห์ความเร่งจะมีความซับซ้อนมากกว่า เนื่องจากว่า ความเร่งหนึ่งตัวจะประกอบด้วยความเร่งย่อย 2 ความเร่ง คือ

ความเร่งในแนวสัมผัส กับ **ความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลาง**



$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{O'} + \mathbf{a} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{P/O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/O'})$$

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_P^n + \mathbf{a}_P^t$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^n + \mathbf{a}^t$$

$$\mathbf{a}_{P/O'} = \mathbf{a}_{P/O'}^n + \mathbf{a}_{P/O'}^t$$

ขั้นตอนการวิเคราะห์ความเร่ง

การวิเคราะห์ความเร่งมีขั้นตอนดังนี้

- กำหนดแกนอ้างอิง $x - y - z$ โดยอาศัยรูปในหน้าที่ 4 เป็นแนวทาง
- กำหนดจุด สมการความเร่งระหว่างจุด และแสดงการรู้ขนาด (Magnitude) และทิศทาง (Direction)

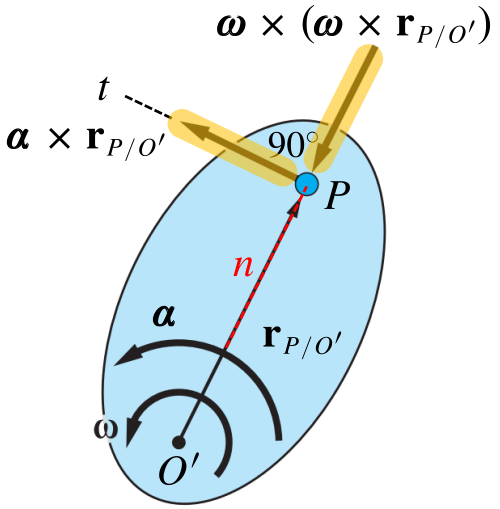
	องค์ประกอบความเร่ง				
M					
D					

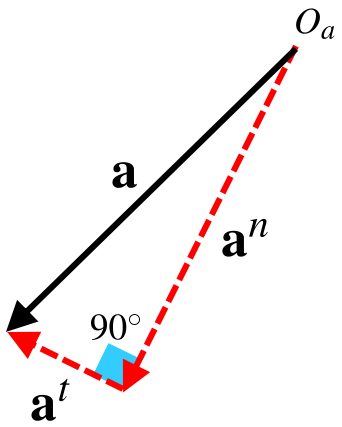
- กำหนดจุด O_a มาตราส่วนความเร่ง และวาดความเร่งย่อยแต่ละตัว แบบหางต่อหัวโดยเริ่มจากตัวที่รู้ค่าก่อน พึงระลึกไว้เสมอว่า

$$\mathbf{a}^n \perp \mathbf{a}^t$$

$$a = \sqrt{(a^n)^2 + (a^t)^2}$$

และเมื่อวาดเสร็จแล้ว รูปเหลี่ยมความเร่งจะต้องเป็นรูปปิด (closed polygon)





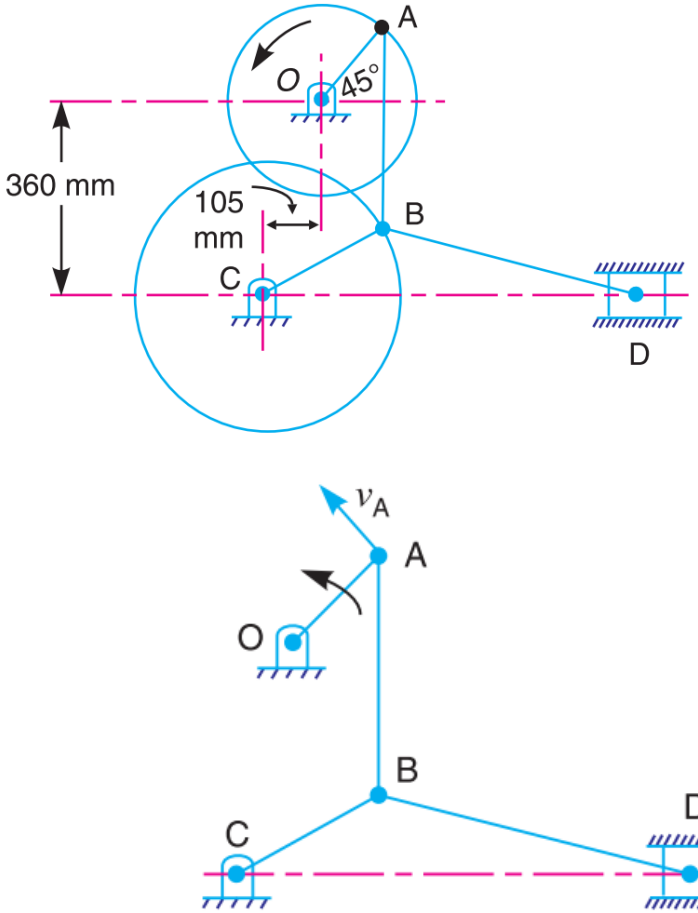
ตัวอย่างการวิเคราะห์ความเร่ง

In the toggle mechanism shown in the figure, the slider D is constrained to move on a horizontal path. The crank OA is rotating in the counter-clockwise direction at a speed of 180 r.p.m. increasing at the rate of 50 rad/s^2.

The dimensions of the various links are as follows: OA = 180 mm; BC = 240 mm; AB = 360 mm; and BD = 540 mm.

For the given configuration, find

1) velocity of slider D and angular velocity of BD, and
2) acceleration of slider D and angular acceleration of BD.



kinematics diagram

ตัวอย่างการวิเคราะห์ความเร่ง

การวิเคราะห์ความเร็ว (เพื่อนำไปหาความเร่ง)

1. กำหนดสมการความเร็วสัมพัทธ์ระหว่างจุดสองจุด และเมื่อพิจารณาสาระในหน้าที่ 4 จะได้ว่า

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

โดยที่เป็นกรณีแรกเนื่องจากจุด B อยู่ห่างจากจุด A เป็นระยะคงที่ จากนั้นแสดงการรู้ขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ความเร็วดังนี้

	$\mathbf{v}_B$	$\mathbf{v}_A$	$\mathbf{v}_{B/A}$
D	✓	✓	✓
M	✗	✓	✗

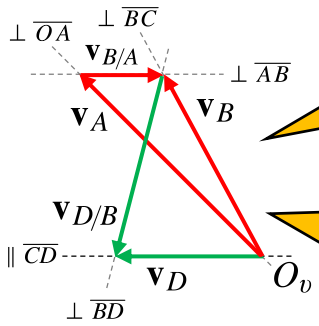
2. คำนวณความเร็วที่รู้ขนาดและทิศทาง คือ $\mathbf{v}_A$

$$\omega_{OA} = \frac{2\pi N}{60} = 18.85 \text{ rad/s}^2$$

$$v_A = r_A \omega_{OA} = 18.85 \text{ rad/s} \times 0.18 \text{ m} = 3.40 \text{ m/s CCW } (\perp \overline{OA})$$

3. กำหนดมาตราส่วนการวาดรูปเหลี่ยมความเร็วที่เหมาะสม และกำหนดจุด O_v

4. เริ่มวาดเวกตอร์ $\mathbf{v}_A$ และเวกเตอร์อื่น ๆ โดยอาศัยหลักการสำคัญ คือ $v = r\omega$ โดยที่ $v \perp r$ และ $v \perp \omega$ ซึ่งก็จะได้รูปเหลี่ยมความเร็วดังนี้



velocity diagram/polygon

วาดความเร็วสัมบูรณ์ต้องออกจากจุด O_v เท่านั้นส่วนความเร็วสัมพัทธ์ให้วาดเชื่อมระหว่างความเร็วสัมบูรณ์

กรณีความสัมพันธ์ของความเร็วระหว่างจุด B และ D ก็ให้กำหนดสมการความเร็ว $\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{D/B}$ และวาดเวกเตอร์ความเร็วตามหลักการสำคัญข้างต้นใน 4

5. ใช้การวัดประกอบมาตราส่วนความเร็วเพื่อหาความเร็วต่าง ๆ ได้ดังนี้ $v_B = 2.80$ m/s CCW $(\perp \overline{BC})$ $v_{B/A} = 0.90$ m/s CCW $(\perp \overline{AB})$ $v_D = 2.05$ m/s $\leftarrow$ $(\parallel \overline{CD})$ $v_{D/B} = 2.40$ m/s CW $(\perp \overline{BD})$

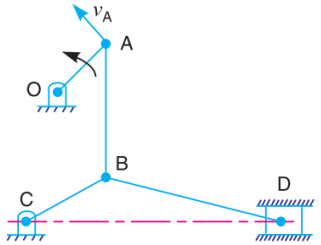
หมายเหตุ : พึงสังเกตการใช้สัญลักษณ์แทนเวกเตอร์กับสเกลาร์ให้ถ้วนถี่

ตัวอย่างการวิเคราะห์ความเร่ง

การวิเคราะห์ความเร่ง

1. กำหนดสมการความเร่งสัมพัทธ์ระหว่างจุดสองจุด และเมื่อพิจารณาสาระในหน้าที่ 6 จะได้ว่า $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$
   โดยที่เป็นกรณีแรกเนื่องจากจุด B อยู่ห่างจากจุด A เป็นระยะคงที่ จากนั้นแสดงการรู้ขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ความเร่งดังนี้

	$\mathbf{a}_B^n$	$\mathbf{a}_B^t$	$\mathbf{a}_A^n$	$\mathbf{a}_A^t$	$\mathbf{a}_{B/A}^n$	$\mathbf{a}_{B/A}^t$
D	✓	✓	✓	✓	✓	✓
M	✓	✗	✓	✓	✓	✗



2. คำนวณความเร่งที่รู้ขนาดโดยใช้สูตรในหน้าที่ 6 โดยใช้ความเร็วที่หาได้ในหน้าที่ 11

$$a_B^n = \frac{v_B^2}{r_B} = \frac{(2.80)^2\ \text{m}^2/\text{s}^2}{0.24\ \text{m}} = 32.5\ \text{m/s}^2\ (B \to C)$$

$$a_A^n = \frac{v_A^2}{r_A} = \frac{(3.40)^2\ \text{m}^2/\text{s}^2}{0.18\ \text{m}} = 63.9\ \text{m/s}^2\ (A \to O)$$

$$a_{B/A}^n = \frac{v_{B/A}^2}{r_{B/A}} = \frac{(0.90)^2\ \text{m}^2/\text{s}^2}{0.36\ \text{m}} = 2.25\ \text{m/s}^2\ (B \to A)$$

$$a_B^t = ?\ (\perp \overline{BC})$$

$$a_A^t = r_A \alpha_{OA} = 50\ \text{rad/s}^2 \times 0.18\ \text{m} = 9.0\ \text{m/s}^2\ \text{CCW}\ (\perp \overline{OA})$$

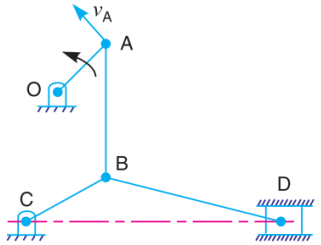
$$a_{B/A}^t = ?\ (\perp \overline{AB})$$

ตัวอย่างการวิเคราะห์ความเร่ง

การวิเคราะห์ความเร่ง $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$

3 กำหนดมาตราส่วนการวาดรูปเหลี่ยมความเร่งที่เหมาะสม และกำหนดจุด O_a

	$\mathbf{a}_B^n$	$\mathbf{a}_B^t$	$\mathbf{a}_A^n$	$\mathbf{a}_A^t$	$\mathbf{a}_{B/A}^n$	$\mathbf{a}_{B/A}^t$
D	✓	✓	✓	✓	✓	✓
M	✓	✗	✓	✓	✓	✗



$$a_B^n = \frac{v_B^2}{r_B} = \frac{(2.80)^2\ \text{m}^2/\text{s}^2}{0.24\ \text{m}} = 32.5\ \text{m/s}^2\ (B \to C)$$

$$a_A^n = \frac{v_A^2}{r_A} = \frac{(3.40)^2\ \text{m}^2/\text{s}^2}{0.18\ \text{m}} = 63.9\ \text{m/s}^2\ (A \to O)$$

$$a_{B/A}^n = \frac{v_{B/A}^2}{r_{B/A}} = \frac{(0.90)^2\ \text{m}^2/\text{s}^2}{0.36\ \text{m}} = 2.25\ \text{m/s}^2\ (B \to A)$$

$a_B^t = ?\ (\perp \overline{BC})$

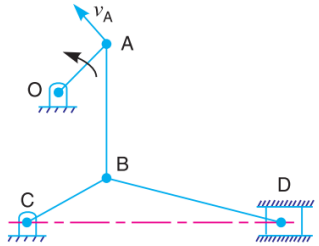
$$a_A^t = r_A \alpha_{OA} = 50\ \text{rad/s}^2 \times 0.18\ \text{m} = 9.0\ \text{m/s}^2\ \text{CCW}\ (\perp \overline{OA})$$

$a_{B/A}^t = ?\ (\perp \overline{AB})$

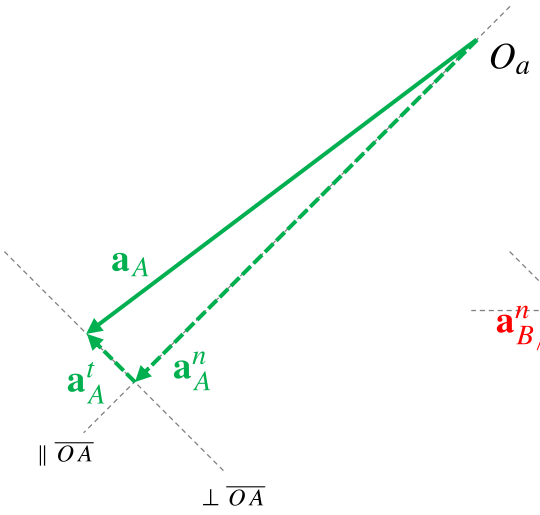
ตัวอย่างการวิเคราะห์ความเร่ง

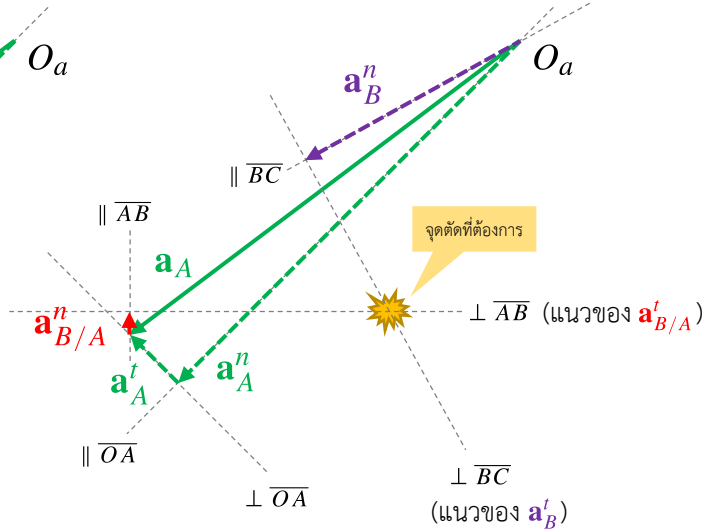
การวิเคราะห์ความเร่ง $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$

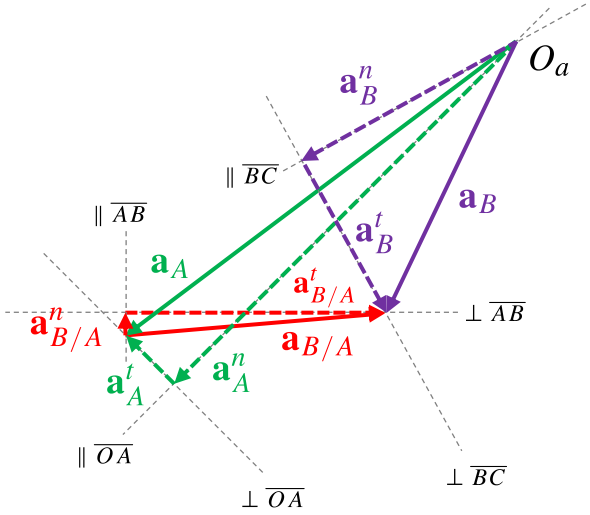
ลำดับการวาด →



4. วาดเส้นแสดงแทนเวกเตอร์แต่ละตัว ตามความสัมพันธ์ของสมการ





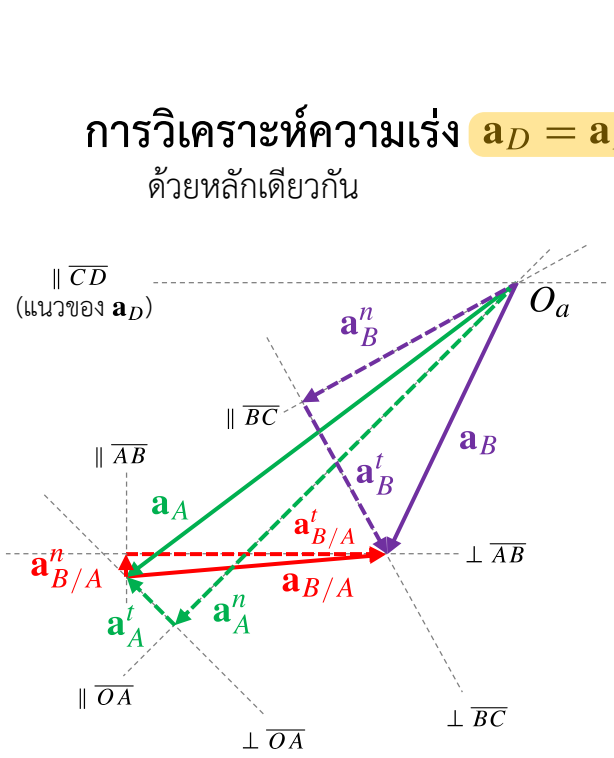


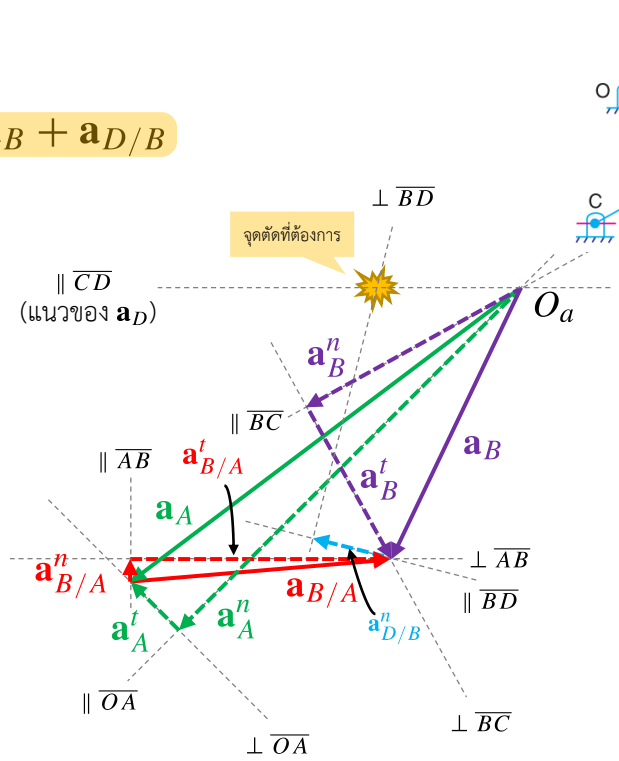
$$\mathbf{a}^n \perp \mathbf{a}^t$$

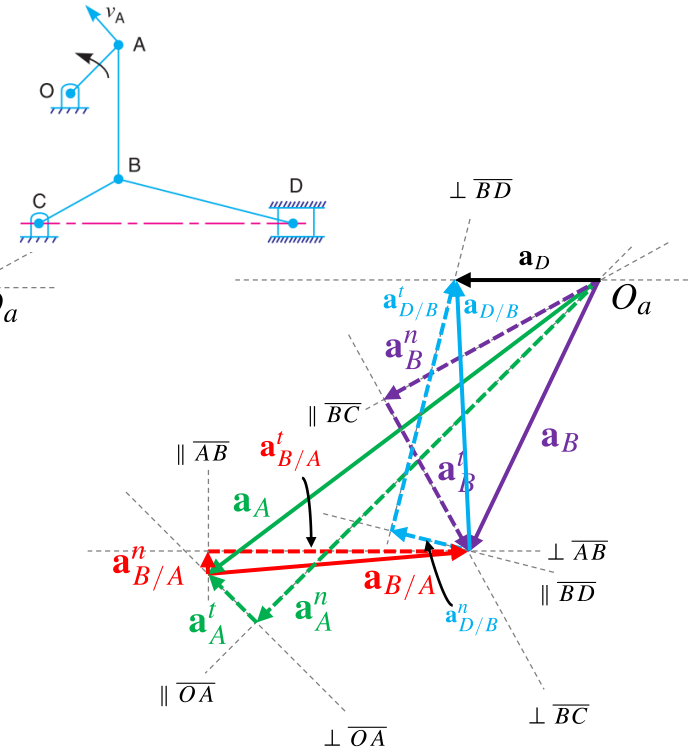
ตัวอย่างการวิเคราะห์ความเร่ง

การวิเคราะห์ความเร่ง $\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{D/B}$

ด้วยหลักเดียวกัน







$$a_{D/B}^n = \frac{v_{D/B}^2}{r_{D/B}}$$
$$= \frac{(2.40)^2\ \text{m}^2/\text{s}^2}{0.54\ \text{m}}$$
$$= 10.7\ \text{m/s}^2\ (D \rightarrow B)$$

$$a_{D/B}^t = ?\ (\perp \overline{BD})$$

$\mathbf{a}^n \perp \mathbf{a}^t$

ตัวอย่างการวิเคราะห์ความเร่ง

การวิเคราะห์ความเร่ง $\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{D/B}$

4. ใช้การวัดประกอบมาตราส่วนความเร็วเพื่อหาความเร่งเชิงเส้นและความเร่งเชิงมุมต่าง ๆ ตามที่ต้องการได้